

Approximation uniforme d'une fonction continue sur un segment par les polynômes de Bernstein.

Nil

7 janvier 2011

Résumé

On démontre que la suite des polynômes de Bernstein associée à une fonction f continue converge uniformément vers f sur $[0,1]$, ce qui démontre le théorème de Weierstrass. Puis, on montre que la vitesse de cette convergence est un $O(\omega(\frac{1}{\sqrt{n}}))$, où ω désigne le module de continuité uniforme de f . Finalement, on exhibe une fonction continue pour laquelle la vitesse de convergence est exactement en $\omega(\frac{1}{\sqrt{n}})$, ce qui démontre l'optimalité de notre résultat sans hypothèses supplémentaires sur f .

Ce qu'on va démontrer. Soit $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{C}$ continue. On introduit les polynômes de Bernstein associés à f en posant, $\forall \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,1]$

$$B_{f,n}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right),$$

et le module de continuité uniforme associé à f en posant $\forall h > 0$

$$\omega(h) = \sup\{|f(x) - f(y)|, |x - y| \leq h\}.$$

1. La suite $(B_{f,n})_n$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.
2. Plus précisément, il existe $C > 0$ indépendante de f telle que

$$\|f - B_{f,n}\|_{\infty} \leq C\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

3. De plus, il existe f_0 continue sur $[0,1]$ et $C' > 0$ tels que

$$\|f_0 - B_{f_0,n}\|_{\infty} \geq C'\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Démonstration.

1. • Soit (X_n) une suite de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes, toutes de même paramètre $x \in [0,1]$. Notons $S_n = X_1 + \dots + X_n$, variable aléatoire de loi Binômiale de paramètres n et x . Par le théorème de transfert,

$$\mathbb{E} \left[f \left(\frac{S_n}{n} \right) \right] = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right) = B_{f,n}(x)$$

Dès lors, $|f(x) - B_{f,n}(x)| = |\mathbb{E} [f(x) - f(\frac{S_n}{n})]| \leq \mathbb{E} |f(x) - f(\frac{S_n}{n})|$.

- f est continue – donc uniformément continue – sur $[0,1]$ (théorème de Heine). Ainsi, pour $\delta > 0$ fixé, lorsque $|x - \frac{S_n}{n}| \leq \delta$, on a $|f(x) - f(\frac{S_n}{n})| \leq \omega(\delta)$. De plus, on a toujours $|f(x) - f(\frac{S_n}{n})| \leq 2\|f\|_{\infty}$. En notant A l'événement $\{|x - \frac{S_n}{n}| \leq \delta\}$, il vient

$$\mathbb{E} \left| f(x) - f\left(\frac{S_n}{n}\right) \right| \leq \omega(\delta)\mathbb{P}(A) + 2\|f\|_{\infty}\mathbb{P}(A^C).$$

L'inégalité de Tchebychev permet d'écrire :

$$\mathbb{P}(A^C) = \mathbb{P}\left(\left|x - \frac{S_n}{n}\right| > \delta\right) \leq \frac{\text{Var}\left(\frac{S_n}{n}\right)}{\delta^2} = \frac{\text{Var}(S_n)}{n^2\delta^2} = \frac{x(1-x)}{n\delta^2} \leq \frac{1}{4n\delta^2}.$$

On a finalement, en majorant $\mathbb{P}(A)$ par 1 :

$$\forall x \in [0, 1], \quad |f(x) - B_{f,n}(x)| \leq \omega(\delta) + \frac{\|f\|_\infty}{2n\delta^2},$$

d'où

$$\|f - B_{f,n}\|_\infty \leq \omega(\delta) + \frac{\|f\|_\infty}{2n\delta^2}$$

et

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|f - B_{f,n}\|_\infty \leq \omega(\delta)$$

Comme $\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(\delta) = 0$, finalement

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|f - B_{f,n}\|_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f - B_{f,n}\|_\infty = 0,$$

ce qui montre la convergence uniforme de $B_{f,n}$ vers f sur $[0,1]$.

2. • On a besoin ici de quelques propriétés du module de continuité uniforme de f , et on commence par admettre le résultat :

Lemme. ω est une fonction sous-additive :

$$\forall h_1, h_2, \quad \omega(h_1 + h_2) \leq \omega(h_1) + \omega(h_2)$$

Par suite, pour tout entier naturel n et h réel positif, $\omega(nh) \leq n\omega(h)$. De plus, il est facile de voir que ω est croissante. Dès lors, pour h_1 et h_2 positifs :

$$\omega(h_1 h_2) \leq \omega[(1 + [h_1])h_2] \leq (1 + [h_1])\omega(h_2) \leq (1 + h_1)\omega(h_2).$$

- On a toujours, pour $x \in [0, 1]$, $|f(x) - B_{f,n}(x)| \leq \mathbb{E}|f(x) - f\left(\frac{S_n}{n}\right)|$. Or par définition de ω ,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left|f(x) - f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right| &\leq \mathbb{E}\left[\omega\left(\left|x - \frac{S_n}{n}\right|\right)\right] \\ &\leq \mathbb{E}\left[\left(1 + \sqrt{n}\left|x - \frac{S_n}{n}\right|\right)\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right] \\ &= \left(1 + \sqrt{n}\left\|x - \frac{S_n}{n}\right\|_1\right)\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \end{aligned}$$

Or $\|f(x) - f\left(\frac{S_n}{n}\right)\|_1 \leq \|f(x) - f\left(\frac{S_n}{n}\right)\|_2$, puisqu'on intègre sur un espace de mesure finie. On calcule

$$\begin{aligned} \left\|x - \frac{S_n}{n}\right\|_2^2 &= x^2 - \frac{2x}{n}\mathbb{E}(S_n) + \frac{\mathbb{E}(S_n^2)}{n^2} = x^2 - \frac{2x}{n}(nx) + \frac{\mathbb{E}(S_n)^2 + \text{Var}(S_n)}{n^2} \\ &= -x^2 + \frac{n^2x^2 + nx(1-x)}{n^2} = \frac{x(1-x)}{n} \leq \frac{1}{4n}, \end{aligned}$$

d'où finalement $|f(x) - B_{f,n}(x)| \leq \left(1 + \sqrt{n}\sqrt{\frac{1}{4n}}\right)\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{3}{2}\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, majoration indépendante de x d'où

$$\|f(x) - B_{f,n}(x)\|_\infty \leq \frac{3}{2}\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

3. On admet le résultat suivant :

Lemme (Inégalité de Khintchine). Soit (R_n) une suite de variables aléatoires indépendantes de Rademacher (c.-à-d. de loi uniforme sur $\{-1, 1\}$). $\forall X \in \text{Vect}(R_n), \|X\|_2 \leq \sqrt{2}\|X\|_1$

Soit $f_0 : x \mapsto |x - \frac{1}{2}|$. La deuxième inégalité triangulaire donne :

$$\forall x, y, \quad |f_0(x) - f_0(y)| = \left| |x - \frac{1}{2}| - |\frac{1}{2} - y| \right| \leq |x - y|,$$

d'où par définition du module de continuité uniforme : $\forall h, \quad \omega(h) \leq h$.

$$\forall n, \|f_0 - B_{f_0, n}\|_\infty \geq |f_0(\frac{1}{2}) - B_{f_0, n}(\frac{1}{2})| = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{1}{2^n} \left| \frac{k}{n} - \frac{1}{2} \right|.$$

On reconnaît par le théorème de transport, en prenant $S_n = X_1 + \dots + X_n$ somme de n variables indépendantes de Bernoulli, toutes de paramètre $\frac{1}{2}$:

$$\mathbb{E} \left| \frac{S_n}{n} - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2n} \mathbb{E} |2S_n - n| = \frac{1}{2n} \|R_1 + \dots + R_n\|_1.$$

Où les variables aléatoires $(R_n) = (2X_n - 1)$ sont indépendantes et de Rademacher. Or par l'inégalité de Khintchine,

$$\frac{1}{2n} \|R_1 + \dots + R_n\|_1 \geq \frac{1}{2\sqrt{2}n} \|R_1 + \dots + R_n\|_2$$

□

Référence : Zuily-Queffelec, Éléments d'analyse pour l'agrégation.