Théorème de Brouwer en dimension 2

Arnaud Girand

5 juillet 2012

Références :
- [Rou09], p. 175 – 178 et/ou [GT96] p. 23–24

Prérequis :
- homotopie dans le plan complexe.

Proposition 1 (Brouwer)
Soit $\mathcal{B}$ la boule unité fermée de $\mathbb{R}^2$.
Alors toute application continue de $\mathcal{B}$ dans elle–même admet un point fixe.

Démonstration : Soit $F \in \mathcal{C}^0(\mathcal{B}, \mathcal{B})$. Supposons que F n'admet aucun point fixe. Pour $x \in B$ on peut alors noter $G(x)$ le point d'intersection entre la demi–droite d'origine $F(x)$ passant par x et la sphère $\mathbb{S}^1$.

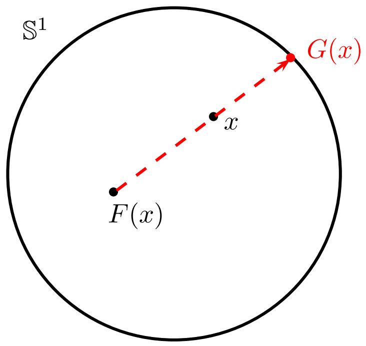

Figure 1 – Construction de la fonction G.

Fixons $x \in \mathcal{B}$. Le point $G(x) \in \mathbb{S}^1$ est alors caractérisée par le système d'équation suivant, d'inconnue $\lambda > 0$:

$$\begin{cases} G(x) - F(x) = \lambda(x - F(x)) \\ \|G(x)\|^2 = 1 \end{cases}$$

Ce système est équivalent à l'équation suivante :

$$\|\lambda(x - F(x)) + F(x)\|^2 - 1 = 0 \tag{1}$$

Ce qui peut se réécrire – en développant – de la façon suivante :

$$P_x(\lambda) = 0 \text{ avec } P_x = \|x - F(x)\|^2 X^2 + 2\langle x - F(x), F(x)\rangle X + \|F(x)\|^2 - 1 \tag{2}$$

Remarquons que :
- $P_x(0) = \|F(x)\|^2 - 1 \leq 0$ car $F(x) \in \mathcal{B}$;
- $P_x(1) = \|x\|^2 - 1 \leq 0$ car $x \in \mathcal{B}$;
- $P_x(\lambda) \xrightarrow[n \to \pm\infty]{} \infty$.

De fait le polynôme du second degré P_x admet deux racines, l'une négative ou nulle et la seconde supérieure ou égale à un. Ces deux racines sont distinctes donc le discriminant de P_x est nécessairement strictement positif, i.e :

$$\Delta(x) := 4\langle x - F(x), F(x)\rangle^2 + 4\|x - F(x)\|^2(1 - \|F(x)\|^2) > 0$$

Si on suppose trouvée une solution λ de (2), il s'agit alors nécessairement de la racine strictement positif de P_x, i.e de :

$$\lambda(x) := \frac{-2\langle x - F(x), F(x)\rangle + \sqrt{\Delta(x)}}{2\|x - F(x)\|^2} = \frac{-\langle x - F(x), F(x)\rangle + \sqrt{\langle x - F(x), F(x)\rangle^2 + \|x - F(x)\|^2(1 - \|F(x)\|^2}}{\|x - F(x)\|^2}$$

Réciproquement on vérifie que $\lambda(x)$ est bien une solution strictement positive de (2) et donc $G(x) = \lambda(x)$. De plus si $x \in \mathbb{S}^1$, $P_x(1) = 0$ et donc $\lambda(x) = 1$ et comme $x \mapsto \lambda(x)$ est continue G l'est : on a construit une rétraction [1] de $\mathcal{B}$ sur $\mathbb{S}^1$.

Méthode 1 : par homotopie.

Fixons à présent $s \in [0, 1]$ et paramétrons le cercle de centre 0 et de rayon s par l'application suivante :

$$\begin{aligned} x_s : [0,1] &\to \mathcal{B} \\ t &\mapsto (s\cos(2\pi t), s\sin(2\pi t)) \end{aligned}$$

On peut alors définir un lacet [2] γ_s de $\mathcal{B}$ via $\gamma_s : t \mapsto G \circ x_s(t)$. En particulier, γ_0 est le lacet trivial en $G(0)$ et γ_1 parcoure $\mathbb{S}^1$ une fois dans le sens direct, i.e [3] $\forall t \in [0, 1]$, $\gamma_1(t) = e^{2i\pi t}$. Alors :

$$\mathrm{Ind}_{\gamma_0}(0) := \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_0}\frac{dz}{z} = \frac{1}{2i\pi}\int_0^1 \frac{\gamma_0'(t)}{\gamma_0(t)}dt = 0$$

Et :

$$\mathrm{Ind}_{\gamma_1}(0) := \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_1}\frac{dz}{z} = \frac{1}{2i\pi}\int_0^1 \frac{2i\pi e^{2i\pi t}}{e^{2i\pi t}}dt = 1$$

On considère à présent l'application suivante :

$$\begin{aligned} \gamma : [0,1] \times [0,1] &\to \mathcal{B} \\ (s,t) &\mapsto \gamma_s(t) = G \circ x_s(t) \end{aligned}$$

Comme $G(0) \neq 0$ (car $0 \notin \mathbb{S}^1$), cette application est en fait à valeurs dans $\mathcal{B} \setminus \{0\}$, et transforme continûment γ_0 en γ_1 (car $s \mapsto x_s$ est continue) : ces deux lacets sont donc homotopes dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ et donc $\mathrm{Ind}_{\gamma_0}(0) = \mathrm{Ind}_{\gamma_0}(1)$, ce qui est absurde. On en déduit qu'il ne peut exister de rétraction de $\mathcal{B}$ sur $\mathbb{S}^1$ et donc que F admet un point fixe.

Méthode 2 : autrement.

On se base sur le résultat suivant :

Lemme 1
Soit K un compact étoilé *non vide de $\mathbb{C}$.*
On désigne par C_K (resp. E_K) le groupe multiplicatif $\mathcal{C}^0(K, \mathbb{C}^*)$ (resp. $\{e^g \mid g \in \mathcal{C}^0(K, \mathbb{C})\}$).
Alors $C_K = E_K$.

Démonstration : On va montrer que E_K est la composante connexe de $x \mapsto 1$ dans $(C_K, \|.\|_\infty)$.

- Il est clair que $x \mapsto 1 = e^0$ est dans E_K.
- Soit $f = e^g \in E_K$ et soit $\tilde{f} \in C_K$ telle que $\|\tilde{f} - f\|_\infty < \inf_K |f|$. Alors $\left\|\frac{\tilde{f} - f}{f}\right\|_\infty \leq \|\tilde{f} - f\|_\infty \times \frac{1}{\inf_K |f|} < 1$ i.e $\left\|\frac{\tilde{f}}{f} - 1\right\|_\infty < 1$ donc $\frac{\tilde{f}}{f}$ est à valeurs dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. On peut donc poser $h := L\left(\frac{\tilde{f}}{f}\right)$ (où L dénote la représentation principale du logarithme sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$) et avoir $\frac{\tilde{f}}{f} = e^h$. De fait, $\tilde{f} = e^{g+h} \in E_K$: E_K est donc ouvert dans $(C_K, \|.\|_\infty)$.
- E_K est fermé car si G est un groupe topologique et que $H \leq G$ est ouvert, alors G/H est ouvert en tant que réunion de classes d'équivalence homéomorphes à H (prendre $G = C_K$ et $H = E_K$).

1. I.e une application de $\mathcal{B}$ sur $\mathbb{S}^1$ induisant l'identité sur $\mathbb{S}^1$. Vous peinez à visualiser un truc pareil ? C'est normal, cela n'existe pas.
2. I.e un chemin continu fermé.
3. Si vous me pardonnez l'identification $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$.

– E_K est connexe (par arcs) car si $f = e^g \in E_K$ alors $\gamma : (t \in [0,1]) \mapsto e^{tg}$ relie $x \mapsto 1$ à f dans E_K.

E_K est donc bien la composante connexe de $x \mapsto 1$ dans $(C_K, \|.\|_\infty)$. Quitte à homéomorpher tout ça, on peut supposer K étoilé par rapport à 0. Il est clair que $E_K \subset C_K$; fixons $f \in C_K$. Alors pour $t \in [0,1]$ l'application $z \mapsto f(tz)$ appartient à C_K et donc $t \mapsto f_t$ relie f à $z \mapsto f(0)$ dans C_K. Or $\mathbb{C}^*$ est connexe par arcs donc on peut y relier $f(0)$ à 1 ergo on peut relier f à $x \mapsto 1$ dans C_K d'où $f \in E_K$.

Revenons nous en à nos moutons (topologiques) : on a construit une rétraction G de $\mathcal{B}$ sur Ss^1. Comme G ne s'annule pas sur le compact [4] $\mathcal{B}$, $G \in C_{\mathcal{B}} = E_{\mathcal{B}}$ ergo il existe g continue telle que $G = e^g$. De plus, pour $z \in \mathbb{S}^1$ on a $-1 = \dfrac{G(z)}{G(-z)} = e^{g(z)-g(-z)}$. De fait, il existe $k(z) \in \mathbb{Z}$ tel que $g(z) - g(-z) = i\pi(2k(z)+1)$. k étant une application continue du connexe $\mathbb{S}^1$ à valeurs dans $\mathbb{Z}$ elle est constante donc $g - g(-.)$ l'est également. Or en tout $z \neq \pm 1$ on a $g(z) - g(-z) = L(G(z)) - L(G(-z)) = L(z) - L(-z)$ donc $g - g(-.)$ y est impaire, donc nulle car constante. Or $G \neq 1$ d'où la contradiction voulue.

On en déduit qu'il ne peut exister de rétraction de $\mathcal{B}$ sur $\mathbb{S}^1$ et donc que F admet un point fixe.

Détails supplémentaires :

– Une équivalence d'homotopie entre deux lacets κ et η partant d'un même point $x_0 \in \mathbb{C}$ — i.e vérifiant $\kappa(0) = \eta(0) = x_0$ — est [5] une application $f : [0,1]^2 \to \mathbb{C}$ telle que :
  (i) $f(0,.) = \kappa$ et $f(1,.) = \eta$;
  (ii) $\forall t \in [0,1]$, $f(.,t)$ est continue ;
  (iii) $\forall s \in [0,1]$, $f(s,.)$ est un lacet partant de x_0.

  Dans le cas de notre application γ, (i) et (ii) sont évidents et (iii) découle du fait que $\forall s \in [0,1]$, $\gamma_s(0) = G(x_s(0)) = G(0)$.

Références

[GT96] Stéphane Gonnord and Nicolas Tosel. *Topologie et analyse fonctionnelle.* Ellipses, 1996.

[Rou09] François Rouvière. *Petit guide du calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation (3e édition).* Cassini, 2009.

4. Saint Riesz, priez pour nous.
5. On se place ici dans le cas particulier du plan complexe. La définition se généralise très facilement à tout espace topologique.