Théorème de Von Neumann

Ce développement se trouve dans *Calcul différentiel*, de Gonnord et Tosel.

Théorème. *Soit G un sous-groupe fermé de $GL_n(\mathbb{R})$. Alors G est une sous-variété de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$.*

Démonstration.

Lemme. *L'espace*
$$\mathcal{L}_G = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \forall t \in \mathbb{R}, \exp(tM) \in G\}$$
est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Démonstration. L'exponentielle matricielle est différentiable en 0 (elle est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$) de différentielle $D\exp(0) = I$ réalisant un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Par théorème d'inversion locale, il existe donc un voisinage U de 0 et un voisinage V de I dans $GL_n(\mathbb{R})$ tels que l'exponentielle réalise un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme de U sur V. On note L sa fonction réciproque.
Soient $a, b \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Puisque $\exp(x) = I + x + o\left(\frac{1}{x}\right)$, on a

$$\exp\left(\frac{a}{k}\right)\exp\left(\frac{b}{k}\right) = I + \frac{a+b}{k} + o\left(\frac{1}{k}\right).$$

Ainsi, pour k suffisamment grand, $\exp\left(\frac{a}{k}\right)\exp\left(\frac{b}{k}\right) \in V$ et on peut utiliser L :

$$\left[\exp\left(\frac{a}{k}\right)\exp\left(\frac{b}{k}\right)\right]^k = \exp\left(kL\left(\exp\left(\frac{a}{k}\right)\exp\left(\frac{b}{k}\right)\right)\right) = \exp\left(kL\left(I + \frac{a+b}{k} + o\left(\frac{1}{k}\right)\right)\right).$$

Puisque $L(I + M) = M + o(|M|)$, le dernier terme tend vers $\exp(a+b)$ quand $k \to \infty$.
$\mathcal{L}_G$ est clairement stable par multiplication externe. Si $a, b \in \mathcal{L}_G$ et $t \in \mathbb{R}$,

$$\exp(t(a+b)) = \lim_{k\to\infty} \underbrace{\left(\exp\left(\frac{ta}{k}\right)\exp\left(\frac{tb}{k}\right)\right)^k}_{\in G}$$

et G est fermé, ce qui permet de conclure. $\square$

On peut alors introduire M, supplémentaire de $\mathcal{L}_G$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et définir une application φ : $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R})$ en envoyant $x = l + m$ ($(l, m) \in \mathcal{L}_G \times M$) sur $\exp(l)\exp(m)$.

On va maintenant montrer par l'absurde qu'il n'existe pas de suite (m_k) de $M \setminus \{0\}$ tendant vers 0 et telle que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\exp(m_k) \in G$.
On suppose l'existence d'une telle suite et on pose $\varepsilon_k = \frac{m_k}{|m_k|}$. Quitte à extraire, on peut supposer que (ε_k) converge vers $\varepsilon \in M$ de norme 1. Montrons qu'alors $\varepsilon \in \mathcal{L}_G$. Soit $t \in \mathbb{R}$, on a $\exp(t\varepsilon) = \lim_k \exp(tm_k/|m_k|)$. Si on pose $\frac{t}{|m_k|} = \lambda_k + \mu_k$ avec $\lambda_k \in \mathbb{Z}$ et $|\mu_k| < \frac{1}{2}$, on obtient

$$\exp\left(t\frac{m_k}{|m_k|}\right) = \exp(\lambda_k m_k)\exp(\mu_k m_k).$$

Or, $\exp(\lambda_k m_k) \in G$ car $\lambda_k \in \mathbb{Z}$, et $\exp(\mu_k m_k)$ tend vers 1 puisque m_k tend vers 0 et μ_k borné. Puisque G est fermé, $\exp(t\varepsilon) \in G$.

Montrons alors que G est discret si et seulement si $\mathcal{L}_G = \{0\}$.
Si G est discret, $\mathcal{L}_G$ est forcément nul (sinon $(\exp(tm))_t \subset G$).
Réciproquement, si $\mathcal{L}_G$ est nul, l'absence de suite de limite nulle de $M \setminus \{0\}$ telle que $\exp(m_k) \in G$ montre (en utilisant L) que I est isolé. Par structure de groupe topologique, tous les points sont isolés.

On va maintenant conclure la preuve.
On suppose que $\mathcal{L}_G \neq 0$. Alors, comme φ est $\mathcal{C}^\infty$ et que sa différentielle en 0 est l'identité, elle réalise un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme d'un voisinage ouvert $\tilde{U}$ de 0 sur $\varphi(\tilde{U})$, voisinage ouvert de I dans $GL_n(\mathbb{R})$. Reste à voir que quitte à restreindre $\tilde{U}$, tout élément de $\varphi(U) \cap G$ est image par φ d'un élément de $U \cap \mathcal{L}_G$. Si ce n'est pas le cas, il existe deux suites $(m_k) \subset M \setminus \{0\}$ et $(l_k) \subset \mathcal{L}_G$ de limite nulle telles que $\varphi(m_k + l_k) \in G$. Or, les $\exp(l_k)$ sont dans G, ceci impliquant que les $\exp(m_k)$ le sont aussi, ce qui est impossible.

On vient de montrer qu'il existait un voisinage ouvert de I dans G difféomorphe à un ouvert d'un espace vectoriel. On termine en invoquant la structure de groupe et le $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme de la translation $h \mapsto gh$. $\square$