Théorème de Cauchy-Peano

2013 – 2014

Théorème (Cauchy-Peano)**.**
Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $(t_0, x_0) \in I \times U$ et $f : I \times U \to \mathbb{R}^n$ une application continue. On considère le problème de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{l} X' = f(t, X) \\ X(t_0) = x_0. \end{array} \right. \tag{1}$$

Alors (1) *admet une solution locale.*

Démonstration. On commence par remarquer que (1) est équivalent à

$$X(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, X(s))\,\mathrm{d}s$$

car f est continue.

On va se placer sur un cylindre de sécurité : soit $r, M > 0$ tels que

$$\bar{B}(x_0, r) \subset U, \quad J := [t_0 - \frac{r}{M}, t_0 + \frac{r}{M}] \subset I \quad \text{et} \quad \sup_{(t,x) \in J \times B(x_0, r)} \|f(t, x)\| \leq M.$$

On note

$$\mathcal{A} := \{x : J \to \bar{B}(x_0, r)\ M-\text{lipschitzienne telle que } x(t_0) = x_0\}$$

et on définit l'opérateur T sur $\mathcal{A}$ par

$$T(x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,\mathrm{d}s.$$

Le but est donc de montrer que T admet un point fixe. On commence par montrer que T est bien défini : pour $x \in \mathcal{A}$ et $t \in J$, on a

$$\|T(x)(t) - x_0\| = \left\| \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,\mathrm{d}s \right\| \leq M|t - t_0| < r$$

et pour $t_1, t_2 \in J$,

$$\|T(x)(t_2) - T(x)(t_1)\| = \left\| \int_{t_1}^{t_2} f(s, x(s))\,\mathrm{d}s \right\| \leq M|t_2 - t_1|,$$

donc T est bien défini.

$\mathcal{A}$ est bien convexe, fermé et on montre par le théorème d'Ascoli que $\mathcal{A}$ est compact. En effet, pour $t \in J$, $\{x(t) \mid x \in \mathcal{A}\} \subset \bar{B}(x_0, r)$ donc $\mathcal{A}$ est ponctuellement bornée (on est en dimension finie) et pour $x \in \mathcal{A}$,

$$\|x(t_1) - x(t_2)\| \leq M|t_1 - t_2|$$

donc $\mathcal{A}$ est bien équicontinue.

Montrons que T est continu pour pouvoir appliquer le théorème de Schauder. Soit $x, y \in \mathcal{A}$ et $\varepsilon > 0$, alors f est uniformément continue sur $J \times \bar{B}(x_0, r)$ donc il existe $\eta > 0$ tel que

$$\|x - y\|_\infty < \eta \Rightarrow \|f(t, x(t)) - f(t, y(t))\| < \varepsilon.$$

D'où, pour $\|x - y\|_\infty < \eta$,

$$\|T(x)(t) - T(y)(t)\| \leq \int_{t_0}^{t} \|f(s, x(s)) - f(s, y(s))\| \, \mathrm{d}s < \varepsilon \frac{M}{r},$$

donc T est continu.

Finalement, $\mathcal{A}$ est un convexe fermé non vide, T est continu de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}$ est compact donc $T(\mathcal{A})$ l'est aussi, on peut donc appliquer le théorème de Schauder qui donne l'existence d'un point fixe pour T. $\square$