Commutant d'un endomorphisme

Ce développement se trouve dans les oraux X-ENS, algèbre, volume 2. On admet le théorème suivant : f est cyclique si et seulement si $\chi_f = \pi_f$.

Théorème. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. On note $\mathcal{C}(A)$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(K)$ qui communtent avec A et $K[A]$ l'ensemble des polynômes en A.*

– *Si A est diagonalisable de valeurs propres $(\lambda_1, \cdots, \lambda_r)$ de multiplicité $(n_1, \cdots, n_r)$, alors*

$$\dim K[A] = r \quad et \dim(\mathcal{C}(A)) = \sum_{i=1}^{r} n_i^2.$$

En outre, $\dim \mathcal{C}(A) = n \Leftrightarrow \dim K[A] = n \Leftrightarrow r = n \Leftrightarrow \mathcal{C}(A) = K[A]$.

– *Dans le cas général, $\mathcal{C}(A) = K[A] \Leftrightarrow A$ est cyclique.*

Démonstration. Commençons par quelques remarques générales. Quelle que soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$, $\dim K[A] = \deg \pi_A$, polynôme minimal de A. En effet, l'application $P \mapsto P(A)$ est surjective de $K[X]$ sur $K[A]$ de noyau $\pi_A K[X]$, donc restreinte à $K_{r-1}[X]$, elle réalise un isomorphisme.
Par ailleurs, tout polynôme en A commute avec A donc $K[A] \subset \mathcal{C}(A)$.
Enfin, les sous-espaces propres de A sont stables par tout élément de $\mathcal{C}(A)$.

– Supposons donc A diagonalisable. On note $(E_i)_{i=1}^r$ les sous espaces propres associés aux (λ_i). Tout élément $B \in \mathcal{C}(A)$ induit un endormorphisme B_i sur chaque E_i. On peut donc s'intéresser à l'application $\psi : \mathcal{C}(A) \to \mathcal{L}(E_1) \times \cdots \times \mathcal{L}(E_r)$ telle que $\psi(B) = (B_i)$. Celle application est linéaire et injective (si B est nulle sur chaque E_i, B est nulle partout...). Elle est aussi surjective car pour toute famille $(B_i) \in \prod \mathcal{L}(E_i)$, on peut définir B sur $E = \bigoplus E_i$ en posant pour $x \in E_i$, $B(x) = B_i(x)$. On vérifie alors que $B \in \mathcal{C}(A)$ car pour tout i, B_i commute avec $A_i = \lambda_i I$. De fait, $\mathcal{C}(A)$ et $\mathcal{L}(E_i) \times \cdots \times \mathcal{L}(E_r)$ sont isomorphes et $\dim \mathcal{C}(A) = \sum_{i=1}^r n_i^2$. On peut remarquer que $\dim \mathcal{C}(A) \geqslant \sum_{i=1}^r n_i = n$
En outre, $\pi_A = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2) \cdots (X - \lambda_r)$ (il est simplement scindé car A est diagonalisable) donc $\dim K[A] = \deg \pi_A = r$.
Pour démontrer l'équivalence, commençons par supposer $\dim \mathcal{C}(A) = n$. On a alors $\forall i,\ n_i = n_i^2$, ce qui impose que $\forall i\ n_i = 1$, donc que $r = n$. Ceci implique donc $\dim K[A] = n = \dim \mathcal{C}(A)$ donc $\mathcal{C}(A) = K[A]$ (on a déjà une inclusion).
Si $\dim K[A] = n$, cela signifie que $r = n$, donc que tous les n_i sont égaux à 1. Ceci implique $\dim \mathcal{C}(A) = n$ donc $\mathcal{C}(A) = K[A]$.
Enfin, si $K[A] = \mathcal{C}(A)$, on a

$$\dim K[A] = r \leqslant n = n_1 + n_2 + \cdots + n_r \leqslant n_1^2 + \cdots + n_r^2 = \dim \mathcal{C}(A).$$

De fait, toutes ces inégalités sont des égalités et tous les n_i sont égaux à 1, ce qui montre que $n = r$.

– A n'est plus supposée diagonalisable. Montrons le lemme suivant :
Lemme. *La dimension de $\mathcal{C}(A)$ est toujours supérieure ou égale à n.*

Démonstration. Soit $S = \mathcal{C}(A)$. S est l'espace des solutions du système linéaire $AX - XA = 0$, d'inconnue X.
Si A est trigonalisable (on la suppose, quitte à changer de base, trigonalisée), on cherche les solutions $X = (X_{ij})$ triangulaires supérieures. Puisque $AX - XA$ est alors triangulaire supérieure, résoudre ce système équivaut à l'écriture de $\frac{n(n+1)}{2}$ équations traduisant la nullité des coefficients de $AX - XA$.

De celles-ci, on peut supprimer celles corresposnant aux termes diagonaux qui sont trivialement vérifiées. On a donc un système à $\frac{n(n-1)}{2}$ équations à $\frac{n(n+1}{2}$ inconnues, donc S est de dimension supérieure à n, ce qu'il fallait montrer.
Pour une matrice générale, on se place dans L, corps de décomposition de χ_A. Ce dernier est donc scindé et A est alors trigonalisable. L'espace des solutions du système (X est alors dans $\mathcal{M}_n(L)$) est de dimension supérieure à n. $AX - XA$ est un système linéaire à coefficients dans K. On peut donc noter $B \in \mathcal{M}_{n^2}(K)$ sa matrice. Or, le rang est invariant par extension de corps (on peut le voir avec la décomposition UJV). De fait, la dimension de l'espace solution est invariant qu'on prenne X à coefficients dans K ou dans L. Ainsi, $\dim S \geqslant n$, ce qu'il fallait montrer. $\square$

Si $\mathcal{C}(A) = K[A]$, nécessairement, $\dim \mathcal{C}(A) = \dim K[A] = n$, ce qui montre que $\pi_A = \chi_A$.
Réciproquement, si $\pi_A = \chi_A$, A est alors cyclique : il existe $e \in K^n$ tel que $(e, Ae, \cdots, A^{n-1}e)$ est une base de K^n. On considère l'application

$$f : B \in \mathcal{C}(A) \mapsto Be \in K^n$$

qui est linéaire. Si $B \in \ker f$, alors $BA^k e = A^k Be = 0$ donc $B = 0$. Ainsi, $\dim \mathcal{C}(A) = n$ (par le lemme). On en déduit que $K[A] = \mathcal{C}(A)$, par égalité des dimension.

$\square$