1 Preuve topologique de la compacité du calcul propositionnel.

Soit X un ensemble de variables propositionnelles (a priori infini, et c'est d'ailleurs le seul cas intéressant).

On construit par induction l'ensemble $\mathcal{F}$ des formules du calcul propositionnel à variable dans X. C'est une partie de l'ensemble des mots sur l'alphabet $\mathcal{L} = X \cup \{\neg, \wedge, \vee\}$.

Soit A un ensemble de formules, on notera $S_A = \left\{c \in \{0,1\}^X \mid \forall\varphi \in A, [\![\varphi]\!]_c = 1\right\}$, l'ensemble des valuations qui satisfont toutes les formules de A (donc qui satisfont A). On peut noter $[\![\varphi]\!]_c$ par $\varphi(c)$ car chaque formule à variables dans X définit une unique application $\{0,1\}^X \to \{0,1\}$ qui à une distribution de valeurs de vérité c associe la valeur de φ dans ce contexte. On remarque alors que :

$$S_A = \bigcap_{\varphi\in A} \left\{c \in \{0,1\}^X \mid \varphi(c) = 1\right\} = \bigcap_{\varphi\in A} \varphi^{-1}(\{1\})$$

Continuité. Soit φ une formule, alors il existe $n \in \mathbb{N}$ et $x_1, \cdots x_n \in X$ telles que les variables de φ soient exactement dans $V = \{x_1, \cdots x_n\}$.

On va montrer que l'application $\varphi : \{0,1\}^X \to \{0,1\}$ est continue : Où $\{0,1\}$ est munit de sa topologie discrète $(\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\})$, et $\{0,1\}^X$ de la topologie produit associée.

Il est clair que pour $\emptyset$ et $\{0,1\}$, l'image réciproque par φ est un ouvert (on peut aussi dire : toutes les fonctions sont continues pour la topologie triviale à l'arrivée).

Soit maintenant $\varepsilon = 0$ ou 1, on va montrer que $\varphi^{-1}(\{\varepsilon\})$ est un ouvert de la topologie produit sur $\{0,1\}^X$. Or la valeur de φ ne dépend que de la valeur prise par ses variables, aussi si $x \notin V$, alors pour tout contexte c ne définissant pas la valeur de x,

$$[\![\varphi]\!]_{c+[x=1]} = [\![\varphi]\!]_{c+[x=0]} = [\![\varphi]\!]_c$$

Ainsi

$$\varphi^{-1}(\{\varepsilon\}) = \left\{c + c' \in \{0,1\}^X \;\middle|\; c \in \{0,1\}^V, [\![\varphi]\!]_c = \varepsilon \text{ et } c' \in \{0,1\}^{X\setminus V} \text{ qcq}\right\}$$

que l'on pourrait noter $S_\varphi + \{0,1\}^{X\setminus V}$. C'est, par définition de la topologie produit, un ouvert de $\{0,1\}^X$.

Donc φ est continue.

Compacité. On avait obtenu :

$$S_A = \bigcap_{\varphi\in A} \varphi^{-1}(\{1\}) \subset \{0,1\}^X$$

Or φ est continue et $\{1\}$ est fermé (complémentaire de $\{0\}$). Donc $\varphi^{-1}(\{1\})$ est un fermé de $\{0,1\}^X$.

Par théorème de Tychonoff [1], on sait que $\{0,1\}^X$ est compact car produit de compacts. Supposons maintenant A non satisfiable, alors $S_A = \emptyset$ et par propriété de Borel-Lebesgue, il existe une partie finie de $F \subset A$ telle que $S_F = \bigcap_{\varphi\in F} \varphi^{-1}(\{1\}) = \emptyset$, c'est donc bien dire une partie finie non satisfiable.

1. On peut se restreindre au théorème dit de Tychonoff *dénombrable* dès lors que X est dénombrable, avec l'avantage de ne pas utiliser l'axiome du choix.