Points extrémaux de la boule unité de $\mathcal{L}(E)$

Arnaud Girand

5 juillet 2012

Référence :
- [FGN10], p. 130–131

Proposition 1
Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 0$.
On munit $\mathcal{L}(E)$ de la norme subordonnée à la norme euclidienne sur E et on note $\mathcal{B}$ la boule unité fermée de $\mathcal{L}(E)$.
Alors l'ensemble des points extrémaux de $\mathcal{B}$ est le groupe orthogonal $\mathcal{O}(E)$.

Démonstration : Soit $u \in \mathcal{O}(E)$; alors $\|u\| = 1$ donc $u \in \mathcal{B}$. Supposons qu'il existe $v, w \in \mathcal{B}$ tels que $u = \frac{1}{2}(v + w)$ et donnons nous $x \in E$ unitaire. Alors :

$$\begin{aligned} 1 = \|x\| &= \|u(x)\| \\ &= \frac{1}{2}\|v(x) + w(x)\| \\ &\leq \frac{1}{2}(\|v(x)\| + \|w(x)\|) \\ &\leq \frac{1}{2}(\|v\| + \|w\|) \\ &\leq 1 \end{aligned}$$

De fait toutes ces inégalités sont des égalités et donc $\|v(x) + w(x)\| = \|v(x)\| + \|w(x)\|$ et donc il existe $\lambda \geq 0$ tel que $v(x) = \lambda w(x)$. De plus, comme $\frac{1}{2}(\|v(x)\| + \|w(x)\|) = 1$ et que $\|v(x)\|, \|w(x)\| \leq 1$ alors $\|v(x)\| = \|w(x)\| = 1$ d'où $\lambda = 1$ soit $v(x) = w(x)$. Par linéarité on a alors $v = w$ et donc u est extrémal dans $\mathcal{B}$.

Réciproquement, soit $u \in \mathcal{B} \backslash \mathcal{O}(E)$. Fixons B une b.o.n de E et posons $A := \mathrm{mat}_B(u)$. Alors par décomposition polaire "généralisée" (cf. [FGN10], p. 128–129) il existe $O \in O_n(\mathbb{R})$ et $S \in S_n^+(\mathbb{R})$ telles que $A = OS$. De plus, il existe $D := \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n)$, avec $0 \leq d_1 \leq \ldots \leq d_n$, et $P \in O_n(\mathbb{R})$ tel que $S = {}^tPDP$. Par orthogonalité de O on a finalement $\|u\| = \|A\| = \|S\| = \|D\|$.

Comme $\|u\| \leq 1$, les d_k sont nécessairement dans $[0, 1]$ et comme $A \notin O(E)$ on a $d_1 < 1$. De fait d_1 n'est pas un point extrémal de $[-1, 1]$ et donc il existe $-1 \leq \alpha < \beta \leq 1$ tels que $d_1 = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$. On pose alors $D_1 := \mathrm{diag}(\alpha, d_2, \ldots, d_n)$ et $D_2 := \mathrm{diag}(\beta, d_2, \ldots, d_n)$ et on a $D_1 \neq D_2$ et $D = \frac{1}{2}(D_1 + D_2)$, ergo :

$$A = \frac{1}{2}(O^tPD_1P + O^tPD_2P) \text{ avec } O^tPD_1P \neq O^tPD_2P$$

De plus, si $X \in \mathbb{R}^n$ et $i \in \{1, 2\}$ on a :

$$\begin{aligned} \|O^tPD_iPX\| &= {}^tX^tPD_iP^tOO^tPD_iPX \\ &= {}^t(PX)D_i(PX) \\ &\leq \|PX\| \text{ car } \|D_i\| \leq \|D\| \leq 1 \\ &\leq \|X\| \text{ car } P \text{ est orthogonale} \end{aligned}$$

De fait $\|O^tPD_iP\| \leq 1$ et donc u peut bien s'écrire comme milieu de deux points distincts de $\mathcal{B}$, ergo n'est pas extrémal.

Détails supplémentaires :

- On rappelle qu'un point A d'un convexe C est dit *extrémal* si $C \setminus \{A\}$ est convexe, ce qui est équivalent à dire que A n'est pas milieux de deux points (distincts !) de C.
- Si on admet le théorème de Krein–Milman suivant on peut déduire de notre résultat que l'enveloppe convexe de $\mathcal{O}(E)$ est $\mathcal{B}(E)$:

  Théorème 2 (Krein–Milman)
  Tout convexe compact d'un espace vectoriel de dimension finie est enveloppe convexe de l'ensemble de ses points extrémaux.

Références

[FGN10] Serge Francinou, Hervé Gianella, and Serge Nicolas. *Oraux X - ENS, Algèbre 3*. Cassini, 2010.