# Isométries du cube

Arnaud Girand

5 juillet 2012

Référence :
- [Ale99], p. 64–66

On considère le cube $C_6$ centré en l'origine $O$ canonique de l'espace $\mathbb{R}^3$ ( cf. figure ). On note $G$ le sous–groupe des isométries affines de l'espace conservant $C_6$ et $G^+$ le sous–groupe de $G$ formé des transformations de déterminant positif.

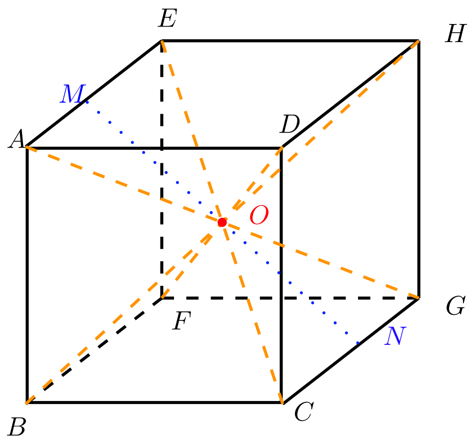


Figure 1 – Le cube $C_6$

Notons $\mathcal{D} := \{D_1, \dots, D_4$ l'ensemble des grandes diagonales (i.e passant par $O$) de $C_6$ ( en orange sur la figure ). Alors, comme $G$ conserve les distances, que la longueur commune à chaque élément de $\mathcal{D}$ est la plus grande distance possible entre deux points du cube et que cette propriété caractérise $\mathcal{D}$, $G$ agit sur $\mathcal{D}$. Ceci nous livre un morphisme de groupes :

$$\rho : G \to \mathfrak{S}(\mathcal{D}) \cong \mathfrak{S}_4$$

Une symétrie axiale (ou rotation d'angle $\pi$) par rapport à un axe reliant les milieux de deux côtés et passant par 0 réalise (au sens de $\rho$) une transposition ; par exemple, la symétrie par rapport à $(MN)$ échange $[AG]$ et $[CE]$. Ainsi, comme on peut réaliser toutes les transpositions de $\mathcal{S}_4$, $\rho$ est surjectif.

Soit à présent $f \in \ker(\rho)$, que l'on suppose différente de l'identité. En pratique, cela signifie que $\forall i \in [4]$, $f(D_i) = D_i$ mais qu'il existe un indice $i_0$ tel que $f$ échange les sommets de $D_{i_0}$. On peut, sans perdre de généralité[1] supposer que $f(A) = G$. Alors $f(B) \in \{B, H\}$ et $d(f(A), f(B)) = d(A, B)$ donc on a nécessairement $f(B) = H$. En itérant ce procédé, on trouve que $f$ échange les sommets de toutes les grandes diagonales de $C_6$, ergo $f$ est la symétrie $s_O$ par rapport à l'origine (car elle lui est égale sur les sommets donc sur tout le cube qui est l'enveloppe convexe de ces derniers). On en déduit donc que :

$$\ker(\rho) = \{\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}, s_O\}$$

De fait on obtient un isomorphisme :

$$G/\{\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}, s_O\} \cong \mathfrak{S}_4$$

1. Car après tout, qu'est-ce qu'un nom ?

Les classe modulo $\ker(\rho)$ sont de la forme $\{f, s_0 \circ f\}$. Or $\det(s_0 \circ f) = \det(s_O)\det(f) = -\det(f)$. De fait, chaque classe d'équivalence contient exactement un déplacement (et un antidéplacement), ce qui signifie que :

$$G/\{\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}, s_O\} \cong G^+$$

On en déduit alors par composition que :

$$G^+ \cong \mathfrak{S}_4 \tag{1}$$

On remarque à présent que, si on pose $\mathbf{C} := \langle s_O \rangle = \{\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}, s_O\} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, on a :
- $|G| = |G^+||\mathbf{C}|$, égalité obtenue car $\mathbf{C} = \ker(\rho)$ et que $G/\ker(\rho) \cong \mathfrak{S}_4 \cong G^+$ d'après ce qui précède ;
- $G^+ \cap \mathbf{C} = \{\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}\}$ car $\det(s_O) = -1$ ;
- $G^+ \lhd G$ car $(G : G^+) = 2$ ;

De fait on a :

$$G \cong G^+ \rtimes \mathbf{C}$$

De plus, $\mathbf{C} \lhd G$ car $\mathbf{C} = \ker(\rho)$. En particulier, si $a \in G$, $as_O = as_Oa^{-1}a \in \{a, s_Oa\}$ et comme $s_O$ est inversible on a nécessairement $as_O = s_Oa$. La conjugaison par $\mathbf{C}$ étant triviale, le produit semi–direct interne ci–dessus est direct.

In fine, on a l'isomorphisme suivant :

$$G \cong G^+ \times \mathbf{C} \cong \mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \tag{2}$$

**Détails supplémentaires :**
- On peut donner un "dictionnaire" de l'isomorphisme $G^+ \cong \mathfrak{S}_4$.
  * L'identité ... Ahem.
  * Les transpositions sont réalisées comme on l'a vu par les retournements d'axes joignant les milieux de deux côtés en passant par $O$.
  * Les 3–cycles sont réalisés par les rotations d'angle (géométrique) $\dfrac{2\pi}{3}$ autour de l'une des diagonales. Par exemple, le 3–cycle $(1\,2\,3)$ (où l'on identifie *naturellement*[2] $\mathfrak{S}_(\mathcal{D})$ à $\mathfrak{S}_4$ via $D_i \mapsto i$) a pour axe $D_4$.
  * Les 4–cycles correspondent quant à eux aux rotations d'angle $\frac{\pi}{2}$ autour d'un axe orthogonal à 2 faces du cube.
  * Les doubles–transpositions sont réalisés par le carré de l'une des rotations d'angle $\frac{\pi}{2}$ ci–dessus.

  Au final on a :
  ▷ 6 axes d'ordre 2 (pour 6 transpositions) ;
  ▷ 4 axes d'ordre 3 (pour 8 3–cycles : une rotation d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$ et une d'angle $-\dfrac{2\pi}{3}$) ;
  ▷ 3 axes d'ordre 4 (pour 6 4–cycles).

# Références


[Ale99] Michel Alessandri. *Thèmes de géométrie.* Dunod, 1999.


2. Ne soyons pas tordus ...