Théorème de D'Alembert-Gauss

d'après S. Gonnord, N. Tosel, *Thèmes d'analyse pour l'agrégation, Calcul Différentiel*

Énoncé

Soit $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ application polynomiale non constante. Alors $P^{-1}(\{0\}) \neq \emptyset$.

Preuve

On pose
$$S = \{z \in \mathbb{C}/P'(z) = 0\}, \quad \Lambda = \mathbb{C} \setminus P(S), \quad \Omega = P(\mathbb{C}) \setminus P(S)$$
La preuve se fait en quatre étapes :

- Λ est connexe
- Ω est ouvert dans Λ
- Ω est fermé dans Λ
- P est surjective.

P' est polynomiale non identiquement nulle. Donc elle ne s'annule qu'un nombre fini de fois, i.e. $\sharp S < \infty$. Donc $\sharp P(S) < \infty$. Λ est le complémentaire dans $\mathbb{C}$ de cette partie finie, redémontrons brièvement que Λ est donc connexe par arcs.

Soit $a, b \in \Lambda$, $a \neq b$. Notons $\mathcal{D}_a$ (resp. $\mathcal{D}_b$) l'ensemble des droites passant par a (resp. b), $\mathcal{D}_a$ est isomorphe à $[0, 2\pi[$ qui est de cardinal infini, donc $\exists \Delta_a \in \mathcal{D}_a$, $\forall s \in P(S)$, $s \notin \Delta_a$. De même sur b avec une droite Δ_b. Puis, comme $P(S)$ est finie elle est bornée, $\exists R > 0$, $P(S) \subset B(0, R)$. Si C_R désigne le cercle $\partial B(0, R)$, a' (resp. b') un des deux points d'intersection $\Delta_a \cap C_R$ (resp. $\Delta_b \cap C_R$), le chemin
$$a \xrightarrow{\Delta_a} a' \xrightarrow{C_R} b' \xrightarrow{\Delta_b} b$$
relie continuement a à b dans Λ. Λ étant connexe par arcs, il est connexe.

Soit $x \in \Omega$, soit $z \in P^{-1}(x)$. Par définition, $P'(z) \neq 0$. On rappelle que pour une fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, sa différentielle $f'(z_0)$ en z_0 est définie par
$$\forall w \in \mathbb{C},\ f(z_0 + w) = f(z_0) + f'(z_0)w + |w|\varepsilon(w)$$
(où $\varepsilon(w) \underset{w\to 0}{\longrightarrow} 0$). La différentielle de P en z est $P'(z)$, qui est inversible : par théorème d'inversion locale, $\exists U \in \mathcal{V}(z), \exists V \in \mathcal{V}(x), P_{|U} : U \to V$ difféomorphisme.

Alors, $V = P(U) \subset P(\mathbb{C})$ est un ouvert de $\mathbb{C}$, et $V \cap \Lambda \subset \Omega\, (= P(\mathbb{C}) \cap \Lambda)$. Donc Ω est ouvert dans Λ.

Soit $(x_n)_n$ suite de Ω de limite $x \in \Lambda$. Pour tout n on choisit $z_n \in P^{-1}(x_n)$. Comme P est polynomiale non constante, lorsque $|z| \to +\infty$, $|P(z)| \to +\infty$. Comme $(x_n)_n$ est convergente elle est bornée, i.e. $(P(z_n))_n$ est bornée, donc par contraposée de la phrase précédente, $|z_n| \not\to +\infty$. Ainsi $(z_n)_n$ est une suite bornée de $\mathbb{C}$, par théorème de Bolzano-Weierstrass, elle admet une valeur d'adhérence z. Or P est continue, donc $P(z) = x$.

$x \in \Lambda$, donc $z \notin S$. Donc $x \in \Omega$. Donc Ω est fermé dans Λ.

Ω est à la fois ouvert et fermé dans Λ connexe : $\Omega = \emptyset$ ou $\Omega = \Lambda$. $\Omega = \emptyset \Rightarrow P(\mathbb{C}) = P(S)$ qui est de cardinal fini, ce qui est faux. $\Omega = \Lambda$ donne

$$(\mathbb{C} \setminus P(S)) \subset (P(\mathbb{C} \setminus P(S)) \subset P(\mathbb{C})$$

donc $\mathbb{P}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$: P est surjective. Donc 0 admet un antécédent par P.

Leçons concernées

- 116 : Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.
- 150 : Racines d'un polynôme. Fonctions symétriques élémentaires. Localisation des racines dans les cas réel et complexe.
- 204 : Connexité. Exemples et applications.
- (214 : Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications.)