Densité des polynômes orthogonaux

Florian BOUGUET

Référence : BECK, MALICK, PEYRÉ : Objectif Agrégation

Posons le cadre de ce développement. On définit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et ω un poids sur I, c'est à dire une fonction de I dans $\mathbb{R}$ mesurable strictement positive p.p. telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_I |x|^n \omega(x)dx < \infty$$

On note alors $L^2(\omega)$ l'ensemble des fonctions de carré intégrable contre ω. Il s'agit d'un espace de HILBERT grâce au produit scalaire

$$< f, g >_\omega = \int_I f(x)\overline{g(x)}\omega(x)dx$$

Par le procédé d'orthogonalisation de GRAM-SCHMIDT appliqué à $\mathbb{R}[X]$, il existe une base de $\mathbb{R}[X]$ formée de polynômes échelonnés unitaires orthogonaux deux à deux. Cette famille est appelée *famille des polynômes orthogonaux associès à* ω. On va voir que sous de bonnes hypothèses, il s'agit d'une base hilbertienne de notre espace.
Rq : en fait, ce développement ne fait pas vraiment intervenir les polynômes orthogonaux, mais juste l'espace qu'ils engendrent, à savoir $\mathbb{R}[X]$.

Théorème 1

Si il existe α tel que

$$\int_I e^{\alpha|x|}\omega(x)dx < \infty$$

Alors les polynômes orthogonaux forment une base hilbertienne de $L^2(\omega)$.

Preuve :

Nos polynômes sont évidemment des éléments de $L^2(\omega)$ par définition de ω. Ils forment une base orthonormée de $\mathbb{R}[X]$, il nous suffit juste de montrer que cette famille est dense dans $L^2(\omega)$. Soit $f \in \mathbb{R}[X]^\perp$, on va donc montrer que $f = 0$ p.p. sur I. Commençons par prolonger $f\omega$ sur $\mathbb{R}$:

$$\varphi(x) = f(x)\omega(x)\,\mathbb{1}_I(x)$$

$\int_I \omega(x)dx < \infty$ donc l'espace mesuré $(I, d\omega)$ est de mesure finie. $f \in L^2(\omega) \subseteq L^1(\omega)$ donc $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$. On peut donc regarder la transformée de FOURIER de φ :

$$\hat{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi}\varphi(x)dx = \int_I e^{-ix\xi} f(x)\omega(x)dx$$

Notons pour $z \in \mathbb{C}$

$$g(x, z) = e^{-ixz}\varphi(x) \quad \text{et} \quad G(z) = \int_{\mathbb{R}} g(x, z)dx$$

On va montrer que G est holomorphe sur $B = \{\Im m < \alpha/2\}$ (où α est défini dans l'énoncé du théorème) à l'aide du théorème d'holomorphie sous le signe intégral. En effet,
– $g(\cdot, z)$ est mesurable pour tout $z \in B$

– $g(x, \cdot)$ est holomorphe pour tout $x \in I$
De plus, $\forall x \in I, \forall z \in B$:

$$|g(x,z)| = \left|\mathrm{e}^{-ixz}\varphi(x)\right| \leq \mathrm{e}^{\frac{|x|\alpha}{2}} |f(x)| \, \omega(x)$$

Le terme de droite est une fonction intégrable en x, car $x \mapsto e^{\frac{|x|\alpha}{2}} \in L^2(\omega)$ par hypothèse sur α et ω. G est donc holomorphe sur B. On obtient également toutes les dérivées de G sur B en dérivant simplement sous le signe intégral, c'est-à-dire

$$G^{(p)}(z) = \int_I (-ix)^p \mathrm{e}^{-ixz} f(x)\omega(x)dx$$

On a donc

$$G^{(p)}(0) = (-i)^p \int_I x^p f(x)\omega(x)dx = (-i)^p < f, (x \mapsto x^p) >_\omega = 0$$

Par unicité du développement en série entière, G est nulle sur un voisinage de 0 donc sur B, donc en particulier sur $\mathbb{R}$. En particulier, $\hat{\varphi}$ est nulle. Par injectivité de la transformée de FOURIER, φ est donc nulle sur $\mathbb{R}$. Alors, puisque $\omega > 0$ p.p., $f = 0$ p.p. sur I, ce qui conclut la démonstration du théorème.

□

La condition d'écrasement de ω apparaissant un meu magique, on peu s'interroger sur son utilité. Posons alors

$$I =]0, +\infty[$$

$$\omega(x) = x^{-\ln(x)}$$

$$f(x) = \sin(2\pi \ln(x))$$

Si on note $P_n(x) = x^n$, on va montrer que $< f, P_n >_\omega = 0$, et pourtant $f \neq 0$ p.p. En effet

$$\begin{aligned}
< f, P_n >_\omega &= \int_0^{+\infty} x^{n-\ln(x)} sin(2\pi \ln(x))dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-u^2+u(n+1)} sin(2\pi u)du \qquad \boxed{u \leftrightarrow \ln(x)} \\
&= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\left(u-\frac{n+1}{2}\right)^2+\left(\frac{n+1}{2}\right)^2} sin(2\pi u)du \\
&= \mathrm{e}^{\left(\frac{n+1}{2}\right)^2} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-t^2} sin(2\pi t + (n+1)\pi)dt \qquad \boxed{t \leftrightarrow u - (n+1)/2} \\
&= (-1)^{n+1}\mathrm{e}^{\left(\frac{n+1}{2}\right)^2} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-t^2} sin(2\pi t)dt
\end{aligned}$$

L'intégrande étant impaire, son intégrale vaut 0. $\mathbb{R}[X]$ n'est donc pas totale, la famille des polynômes orthogonaux associés à ω non plus.