Développement dyadique et Bernoulli

31 décembre 2012

Résumé

À partir d'une variable de loi uniforme on construit une suite de Bernoulli $\frac{1}{2}$ indépendantes, on en déduite une suite de variables indépendantes pour n'importe quelle suite de lois et on fini par une construction de mesures diffuses étrangèresz à la mesure de Lebesgue.

1 Des suites i.i.d. de Bernoulli et d'uniformes

Soit $X \sim U[0,1]$, soit D_n le $n^{\text{ème}}$ terme du développement dyadique de X (bien défini si $X(\omega)$ n'est pas un rationel dyadique c'est-à-dire un $\frac{p}{2^q}$, qui sont de mesure de Lebesgue nulle). Considérons un n-uplet $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ et notons

$$I_\varepsilon^n = [\sum_{j=1}^{n} \frac{\varepsilon_j}{2^j}, \sum_{j=1}^{n} \frac{\varepsilon_j}{2^j} + \frac{1}{2^n}]$$

$$\mathbb{P}\big(\bigcap_{j=1}^{n} (D_j = \varepsilon_j)\big) = \lambda(I_\varepsilon^n) = \frac{1}{2^n}$$

Et donc

$$\mathbb{P}(D_j = 1) = \sum_{\varepsilon/\varepsilon_j = 1} \lambda(I_\varepsilon^n) = \frac{1}{2}$$

Et ainsi

$$\mathbb{P}\big(\bigcap_{j=1}^{n} (D_j = \varepsilon_j)\big) = \prod_{j=1}^{n} \mathbb{P}(D_j = \varepsilon_j)$$

n étant arbitraire, on a bien $(D_n)_{\mathbb{N}} \sim^{\perp} \mathcal{B}(\frac{1}{2})$. Soit $\phi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijective, posons $Y_j = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{2^k} D_{\phi_j(k)}$ La loi de Y_j est égale à la loi uniforme sur le π-système des intervalles dyadiques (qui engendre la tribue des boreliens) et Y_j est mesurable par rapport à la tribue engendrée par les $D_{\phi_j(k)}$ qui sont indépendants des $D_{\phi_i(k)}$ pour $i \neq j$, donc les (Y_j) sont indépendants.

2 Des suites indépendantes de lois quelconques

Soit μ une loi, F sa fonction de répartition, considérons son inverse généralisée G définie par $G(x) = \inf\{y/F(y) \leq x\}$. On a alors

$$y \leq G(x) \Leftrightarrow F(y) \leq x$$

En effet, le sens direct découle de la définition de G et de la croissance de F, la réciproque de croissance et de la continuité à droite de F (et donc $F(G(x)) = x$). Ainsi, si $X \simeq U[0,1]$,

$$\mathbb{P}(G(X) \leq y) = \mathbb{P}(X \leq F(y)) = F(y)$$

Donc $G(X)$ a pour fonction de répartition F, autrement dit suit la loi μ.

3 De singulières mesures

Soit $(Y_n)_{\mathbb{N}} \sim^{\perp} \mathcal{B}(p)$ et $X = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{2^n} Y_n$, alors

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}_X(\{\omega\}) & = & \mathbb{P}_X(\forall n, D_n = \omega_n) \\ & \leq & \mathbb{P}_X(D_1 = \omega_1 \dots D_n = \omega_n) \\ & \leq & \max(p, 1-p)^n \to 0 \end{array}$$

D'autre part, d'après la loi des grands nombres, l'évènement $\frac{1}{n}(D_1 + \cdots + D_n) \to p$ est de probabilité 1 si les $D_i \sim \mathcal{B}(p)$ et de probabilité 0 si les $D_i \sim \mathcal{B}(r)$ avec $r \neq p$.

Soit F la fonction de répartition de X, soit $0 \leq x < \frac{1}{2^n}$, on a

$$\begin{array}{rcl} F(\dfrac{1}{2^n} + x) & = & \mathbb{P}_X(\omega \leq \dfrac{1}{2^n} + x) \\ & = & \mathbb{P}_X\big(\forall i \in [|1, n-1|], D_j(\omega) = 0 \text{ et } x \geq \displaystyle\sum_{k\geq n} \frac{1}{2^k} D_k(\omega)\big) \\ & = & \dfrac{1}{2^{n-1}} \mathbb{P}_X\big(2^{n-1}x \geq \displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{1}{2^k} D_k(\omega)\big) \\ & = & \dfrac{1}{2^{n-1}} F(2^{n-1}x) \end{array}$$

Autrement dit, F est fractale.

Références

Ouvrard, “probabilités 2”