Une famille d'endomorphismes diagonalisables qui commutent est codiagonalisable

2012-2013

Proposition.
Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'endomorphismes de E diagonalisables.
*Alors $(u_i)_{i\in I}$ est codiagonalisable (*i.e. *il existe une base commune de diagonalisation) si et seulement si les u_i commutent deux à deux.*

Démonstration.
$\Rightarrow$: Il suffit de l'écrire en terme de matrices.
$\Leftarrow$: Procédons par récurrence sur la dimension n de E.

- Si $n = 1$, c'est évident.
- On suppose le résultat vrai pour les espaces de dimension strictement inférieure à n.
  Si tous les u_i sont des homothétie, alors le résultat est évident. Sinon, soit $j \in I$ tel que u_j ne soit pas une homothétie. Puisque u_j est diagonalisable, on a :

  $$E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u_j)} \ker(u_j - \lambda \mathrm{id})$$

  Chacun des sous-espaces propres E_λ de u_j est de dimension strictement inférieure à n car u_j n'est pas une homothétie. De plus, les u_i commutent avec u_j donc E_λ est stable par tous les u_i et $u_{i|E_\lambda}$ est diagonalisable pour tout λ.
  On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à $(u_{i|E_\lambda})_{i\in I}$ pour tout $\lambda \in Sp(u_j)$, ce qui donne une base commune de diagonalisation des $u_{i|E_\lambda}$ pour tout λ et donc une base commune de diagonalisation des u_i par réunion de ces bases.

□

Remarque. Cette démonstration s'adapte pour montrer qu'une famille d'endomorphismes trigonalisables qui commutent est cotrigonalisable. Il suffit de prendre un sous-espace propre d'un endomorphisme qui n'est pas une homothétie et la stabilité de ce sous-espace propre par la famille d'endomorphismes donne immédiatement la forme triangulaire supérieure (par récurrence) sans parler de somme directe.