Table de caractères du groupe diédral

Arnaud Girand

18 juin 2012

Référence :
- [Ser98], p. 27–28

Soit $n \geq 3$. On cherche ici à déterminer la table de caractères du groupe diédral $D_n := \langle r, s \mid s^2 = r^n = \mathrm{id}, srs = r^{-1} \rangle$.

***Représentations de degré* 1.** Soit ψ une représentation de degré 1 de D_n. Alors $\psi(r)^n = \psi(r^n) = 1$. De fait $\psi(r) \in \mu_n(\mathbb{C})$. De même $\psi(s) \in \{-1, 1\}$ et $\psi(srs) = \psi(s)^2\psi(r) = \psi(r)$ donc $\psi(r) = \psi(r)^{-1})$ ergo $\psi(r)^2 = 1$ donc $\psi(r) \in \{-1, 1\}$. On a donc 4 caractères de degré 1 :

	s	r
χ_1	1	1
χ_2	1	-1
χ_3	-1	1
χ_4	-1	-1

Ou, de façons plus exhaustive :

	r^k	sr^k
χ_1	1	1
χ_2	1	-1
χ_3	$(-1)^k$	$(-1)^k$
χ_4	$(-1)^k$	$(-1)^{k+1}$

***Représentations de degré* 2.** Soient $\omega := e^{2i\pi/n}$ et $h \in \mathbb{Z}$. On peut alors définir une représentation de degré 2 ρ^h (dont nous noterons le caractère χ^h) de D_n comme suit :

$$\rho^h(r^k) := \begin{pmatrix} \omega^{hk} & 0 \\ 0 & \omega^{-hk} \end{pmatrix} \text{ and } \rho^h(sr^k) := \begin{pmatrix} 0 & \omega^{-hk} \\ \omega^{hk} & 0 \end{pmatrix}$$

De façon équivalente, ρ^h est l'unique morphisme de groupes $D_n \to GL_2(\mathbb{C})$ tel que :

$$\rho^h(r) := \begin{pmatrix} \omega^{h} & 0 \\ 0 & \omega^{-h} \end{pmatrix} \text{ and } \rho^h(s) := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Il est immédiat que ρ^h ne dépend que de la classe de h modulo n ; de plus, les représentations ρ^h et ρ^{n-h} sont isomorphes. En effet, si on pose $T := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ on a $T\rho^h(r) = \rho^{-h}(r)T = \rho^{n-h}(r)T$ et $T\rho^h(s) = \rho^{-h}(s)T = \rho^{n-h}(s)T$. On peut donc se réduire au cas $0 \leq h \leq \dfrac{n}{2}$.

- $h = 0$. On vérifie aisément que $\chi^0 = \chi_1 + \chi_2$. De fait, ρ^0 est isomorphe à la somme directe des représentations associées à χ_1 et χ_2 donc est réductible.
- $h = \dfrac{n}{2}$. Comme $\omega^{n/2} = e^{i\pi} = -1$ on a $\chi^{n/2} = \chi_3 + \chi_4$ et donc $\rho^{n/2}$ est réductible.
- $0 < h < \dfrac{n}{2}$. Notons que dans ce cas, $\omega^h \neq \omega^{-h}$, et donc les seules droites de $\mathbb{C}^2$ $\rho^h(r)$–stables sont les axes de coordonnées $\langle(1,0)\rangle$ et $\langle(0,1)\rangle$. Mais ces sous–espaces ne sont pas $\rho^h(s)$–stables ergo ρ^h n'admet aucune sous–représentation non triviale i.e est irréductible. On peut donc ajouter la ligne suivante à notre table :

	r^k	sr^k
χ^h	$2\cos\left(\dfrac{2hk\pi}{n}\right)$	0

Supposons à présent qu'il existe $T \in GL_2(\mathbb{C})$ et $h \neq h'$ $(0 < h, h' < \frac{n}{2})$ tels que $T\rho^h = \rho^{h'}T$. Alors $T\rho^h(r)T^{-1} = \rho^{h'}(r)$ ce qui implique que $\rho^h(r)$ et $\rho^{h'}(r)$ ont le même spectre, i.e $\omega^h = \omega^{\pm h'}$, ce qui est absurde. De fait, les représentations ρ^k pour $0 < k < \frac{n}{2}$ sont deux à deux non isomorphes.
Comme $|D_n| = 2n = 4\times 1 + \left(\frac{n}{2} - 1\right)\times 2^2$, nous avons trouvé toutes les classes de caractères irréductibles de D_n et sommes donc en mesure de dresser sa table de caractères :

	r^k	sr^k
χ_1	1	1
χ_2	1	-1
χ_3	$(-1)^k$	$(-1)^k$
χ_4	$(-1)^k$	$(-1)^{k+1}$
χ^h $0 < h < n/2$	$2\cos\left(\frac{2hk\pi}{n}\right)$	0

Si n est impaire, nous avons seulement deux représentations de degré 1 possibles :

	s	r
χ_1	1	1
χ_2	1	-1

On conclut alors comme précédemment que les représentations ρ^h pour $0 < h \leq \frac{n-1}{2}$ sont irréductibles et deux à deux non isomorphes. Comme $2n = 2 \times 1 + \frac{n-1}{2} \times 2^2$ on a alors bien la table de caractères suivante :

	s	r
χ_1	1	1
χ_2	1	-1
χ^h $0 < h \leq (n-1)/2$	$2\cos\left(\frac{2hk\pi}{n}\right)$	0

Détails supplémentaires :

- La présentation proposée ici de la table de caractères est "non standard" au sens ou ses colonnes ne sont pas agencées selon les classes de conjugaisons. En fait, les classes de conjugaison de D_n sont les suivantes :
  - *si n est pair* : $\{\mathrm{id}\}$, $\{r^{n/2}\}$, $\{s, r^2s, r^4s, \ldots, r^{2n-2}s\}$, $\{rs, r^3s, r^5s, \ldots, r^{2n-1}s\}$ et les $\{r^h, r^{-h}\}$ pour $0 < h < \frac{n}{2}$;
  - *si n est impair* : $\{\mathrm{id}\}$, $\{s, rs, \ldots, r^{n-1}s\}$ et les $\{r^h, r^{-h}\}$ pour $0 < h \leq \frac{n-1}{2}$.

Références

[Ser98] Jean-Pierre Serre. *Représentations linéaires des groupes finis.* Hermann, 1998.