Décomposition de Dunford

Arnaud GIRAND

17 juin 2012

Références :
- [FGN09] p.134–135 et [BMP05] p. 210–211 et 215–216.

Proposition 1 (Dunford)
Soit $\mathbb{K}$ un corps.
Soit E un $\mathbb{K}$–e.v de dimension finie.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
On suppose que χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$.
Alors il existe un unique couple $(d, n) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que :

(i) d soit diagonalisable ;

(ii) n soit nilpotent ;

(iii) $f = d + n$;

(iv) $n \circ d = d \circ n$.

De plus, d et n sont alors des polynômes en f.

DÉMONSTRATION :
- *Existence.* Comme χ_f est scindé on peut l'écrire sous la forme :

$$\chi_f = (-1)^n \prod_{i=1}^{s} (X - \lambda_i)_i^{\alpha}$$

Si on pose pour $i \in [s]$ $N_i := \ker(f - \lambda_i \mathrm{id}_E)^{\alpha_i}$ on a alors par lemme des noyaux appliqué à χ_f :

$$E = \ker(\chi_f(f)) = \bigoplus_{i=1}^{s} N_i$$

On définit alors d et n de la façon suivante :

$$\forall i \in [s], \, \forall x \in N_i, \, \begin{cases} d(x) := \lambda_i x \\ n(x) := f(x) - \lambda_i x \end{cases}$$

Il est alors clair que $d + n = f$, que d est diagonalisable (prendre une base adaptée à la décomposition $E = \oplus_{i=1}^{s} N_i$) et que :

$$\forall i \in [s], \, \forall x \in N_i, \, n^{\alpha_i}(x) = (f - \lambda_i \mathrm{id}_E)_i^{\alpha}(x) = 0$$

Ainsi, si on pose $\alpha := \max_i(\alpha_i)$ et si on décompose $x \in E$ en $x = x_1 + \ldots + x_s$, avec $\forall i \in [s]$, $x_i \in N_i$ alors :

$$\begin{aligned} n^{\alpha}(x) &= n^{\alpha}\left(\sum_{i=1}^{s} x_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{s} n^{\alpha}(x_i) \text{ par linéarité} \\ &= 0 \text{ car } n^{\alpha} = 0 \text{ sur chaque } N_i \end{aligned}$$

Donc n est bien nilpotent.

Si on note, pour $i \in [s]$, p_i le projecteur sur N_i parallèlement à $\oplus_{j \neq i} N_j$ on a de plus :

$$\begin{aligned} \forall x = x_1 + \ldots + x_s \in E, \text{ les } x_i \in N_i, \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \underbrace{p_i(x)}_{=x_i} &= \sum_{i=1}^{s} \lambda_i x_i \\ &= \sum_{i=1}^{s} d(x_i) \\ &= d(x) \end{aligned}$$

I.e :

$$d := \sum_{i=1}^{s} \lambda_i p_i \tag{1}$$

Démontrons à présent que les p_i sont des polynômes en f. Les polynômes $(X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ étant premiers entre eux, le théorème chinois nous affirme l'existence de $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que :

$$\forall i \in [s], \qquad P \equiv \lambda_i [(X - \lambda_i)^{\alpha_i}]$$

Formulé autrement, ceci signifie que pour tout $i \in [s]$ il existe $R_i \in \mathbb{K}[X]$ tel que :

$$P = \lambda_i + R_i (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$$

Or, par décomposition en sous–espaces caractéristiques (cf. supra), tout élément $x \in E$ admet une unique écriture sous la forme $x = x_1 + \ldots + x_s$ avec pour tout $i \in [s]$ $x_i \in N_i$. De plus :

$$\forall i \in [s], \qquad P(f)(x_i) = \lambda_i x_i + R_i(f) \circ (f - \lambda_i \mathrm{id}_E)^{\alpha_i}(x_i) = \lambda_i x_i$$

Ainsi :

$$\forall x \in E, \qquad P(f)(x) = d(x)$$

Et donc $d = P(f)$ est bien un polynôme en f, donc $n = u - d$ également. Ceci implique naturellement que d et n commutent.

– *Unicité.* Soient d' et n' vérifiant (i), (ii), (iii) et (iv). Comme d' (resp. n') commute avec n' (resp. d') (par hypothèse (iv)) et avec lui–même, il commute avec $f = d' + n'$ (hypothèse (iii)) donc avec les polynômes en f. En particulier d commute avec d' et n avec n'. Le premier résultat implique que d et d' sont co–diagonalisables et donc que $d - d'$ est diagonalisable, le second que $n' - n$ est nilpotente. De fait l'endomorphisme $d - d' = n' - n$ est diagonalisable et nilpotent, donc nul, d'où le résultat.

Corollaire 1.1
Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^d)$.
Alors :

$$\exp(f) \textit{ est diagonalisable } \Leftrightarrow f \textit{ est diagonalisable}$$

Démonstration :

($\Leftarrow$) Immédiat.

($\Rightarrow$) Notons $f = d + n$ la décomposition de Dunford de f (avec notations évidentes). D'après la proposition 2, il existe un endomorphisme nilpotent n' tel que $\exp(n) = n' + \mathrm{id}_{\mathbb{C}^d}$ et donc, comme n et d commutent, on a :

$$\exp(f) = \exp(d) + \exp(d) n' \tag{2}$$

Or, toujours comme d et n commutent, e^d et e^n commutent et donc e^d et $n' = e^n - \mathrm{id}_{\mathbb{C}^d}$ également. De fait e^d et $e^d n'$ commutent. Or e^d est diagonalisable et $e^d n'$ nilpotent donc par unicité la décomposition de Dunford de e^f est donnée la relation (2) et donc nécessairement, comme e^f est diagonalisable on a $e^d n' = 0$. Comme $e^d \in GL(\mathbb{C}^d)$, on a $n' = 0$ d'où $e^n = \mathrm{id}_{\mathbb{C}^d}$ ce qui implique (toujours par la proposition 2) que $n = 0$. D'où le résultat.

Détails supplémentaires :

- $n' - n$ *est nilpotente.* Supposons que $n^p = 0$ et $n'^q = 0$. Alors :

$$(n'-n)^{p+q} = \sum_{i=1}^{p+q} C_{p+q}^i n'^i (-1)^{p+q-i} n^{p+q-i} \text{ car } n \text{ et } n' \text{ commutent}$$

  Or si $i < q$, $p+q-i > p$ et donc $n^{p+q-i} = 0$; et si $i \geq q$ alors $n'^i = 0$. In fine $(n'-n)^{p+q} = 0$ d'où le résultat (cf. [Gou94], p. 191).
- *Une autre démonstration du fait que d et n sont des polynômes en u peut être trouvée dans [Gou94], p. 192.* Pour $i \in [s]$ on définit le polynôme suivant :

$$Q_i := \prod_{j \neq i} (X - \lambda_j)^{\alpha_j}$$

  Les Q_i sont premiers entre eux et donc par identité de Bézout il existe $U_1, \ldots, U_s \in \mathbb{K}[X]$ tels que :

$$\sum_{i=1}^{s} U_i Q_i = 1 \tag{3}$$

  Posons $\forall i \in [s],\ f_i := U_i Q_i(f) = U_i(f) \circ Q_i(f)$ et montrons que $f_i = p_i$ ce qui donnera le résultat voulu. Fixons $i \in [s]$.
  * Pour tous $i \neq j$, $\chi_f | Q_i Q_j$ donc :

$$\forall i \neq j\ f_i \circ f_j = U_i Q_i(f) \circ U_j Q_j(f) = U_i U_j(f) \circ Q_i Q_j(f) = 0 \tag{4}$$

    Or d'après (3) :

$$f_i = \mathrm{id}_E \circ f_i = \left(\sum_{j=1}^{s} U_j Q_j(f) \right) \circ f_i = \sum_{j=1}^{s} f_j \circ f_i = f_i^2$$

    Donc les f_i sont bien des projecteurs.
  * Montrons que $(Im)(f_i) = N_i$.
    Soit $y = f_i(x) \in (Im)(f_i)$. Alors :

$$\begin{aligned}(f - \lambda_i \mathrm{id}_E)^{\alpha_i}(y) &= (X - \lambda_i)^{\alpha_i}(f) \circ U_i Q_i(f) \\ &= U_i(f) \circ (X - \lambda_i)^{\alpha_i} Q_i(f) \\ &= U_i(f) \circ \chi_f(f) \\ &= 0\end{aligned}$$

    Donc $y \in N_i$.
    Réciproquement, si $x \in N_i$ alors par (3) on a $x = \sum_j f_j(x)$. Or, si $j \neq i$ $f_j(x) = U_j(f) \circ Q_j(f) = 0$ car $(X - \lambda_i)^{\alpha_i} | Q_j$. In fine $x = f_i(x) \in \mathrm{Im}(f_i)$.
  * Montrons que $\ker(f_i) = \oplus_{j \neq i} N_j$.
    Si $j \neq i$ et $x \in N_j$ alors $f_i(x) = U_i(f) \circ Q_i(f) = 0$ car $(X - \lambda_j)^{\alpha_j} | Q_i$. La somme directe étant le sous espace vectoriel engendré par la réunion on a alors $\oplus_{j \neq i} N_j \subset \ker(f_i)$.
    Réciproquement, si $x \in E$ vérifie $f_i(x) = 0$ alors par (3) $x = \sum_{j \neq i} f_j(x)$. Or $\forall j \in s$, on a montré que $f_j(x) \in N_j$, d'où l'inclusion réciproque et le résultat.
- On admet le résultat suivant (cf. [MT97]) :

Proposition 2
On note $\mathcal{N}$ (resp. $\mathcal{U}$) l'ensemble des endomorphisme nilpotents (resp. unipotents) de $\mathbb{C}^d$. Alors les applications suivantes sont des homéomorphismes :

$$\begin{aligned}\mathcal{N} &\to \mathcal{U} \\ n &\mapsto \exp(n)\end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned}\mathcal{U} &\to \mathcal{N} \\ u &\mapsto u - \mathrm{id}_{\mathbb{C}^d}\end{aligned}$$

Références

[BMP05] Vincent Beck, Jérôme Malick, and Gabriel Peyré. *Objectif Agrégation (2e édition)*. H & K, 2005.

[FGN09] Serge Francinou, Hervé Gianella, and Serge Nicolas. *Oraux X - ENS, Algèbre 2 (2e édition)*. Cassini, 2009.

[Gou94] Xavier Gourdon. *Algèbre*. Ellipses, 1994.

[MT97] Rached Mneimné and Frédéric Testard. *Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques*. Hermann, 1997.