Décomposition effective de Dunford via la méthode de Newton

Références

- Jean-Jacques Risler, Pascal Boyer ; *Algèbre pour la licence 3*, éditions Dunod

Première méthode

Cadre : On prend $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$. La décomposition de Dunford de A (sous l'hypothèse que le polynôme minimal de A soit scindé) nous donne l'existence et l'unicité de deux matrices $D, N \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ telles que :

- $A = D + N$.
- D diagonalisable.
- N nilpotente.
- D et N commutent.

Ces matrices sont alors des polynômes en A.

Lemme 1

Soit $R = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)^{m_i}$ où $R \in \mathbb{R}[X]$ et les $\lambda_i \in \mathbb{C}$ sont deux à deux disjoints. Soit $P = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)$.

Alors on a :

$$P = \frac{R}{R \wedge R'}$$

et donc $P \in \mathbb{R}[X]$.

Démonstration : Si $(X - \lambda_i)^{m_i}$ divise R alors $(X - \lambda_i)^{m_i - 1}$ divise R'.Ainsi le pgcd unitaire de R et R' contiendra le terme $(X - \lambda_i)^{m_i}$ exactement $m_i - 1$ fois. Et donc $R/(R \wedge R')$ sera divisé une et une seule fois par $(X - \lambda_i)$. On vérifie alors que P est unitaire et donc on a bien l'égalité. ■

Appliquons le lemme dans le cas $R = \chi_A$. P est le produit des $(X - \lambda_i)$ pour λ_i qui décris les différentes valeurs propres de A. Il est ainsi scindé à racines simples et vérifie donc $P \wedge P' = 1$. Il s'en suit que $P^d \wedge P' = 1$ et donc considérons $U, V \in \mathbb{R}[X]$ tels que $VP^d + UP' = 1$.

En évaluant l'égalité précédente en A, on obtient $U(A)P'(A) = I - V(A)P^d(A)$ or χ_A divise P^d donc $P^d(A) = 0$ et ainsi $U(A)P'(A) = I$. ($P'(A)$ est inversible d'inverse $U(A)$ facilement calculable).

On peut même remarquer que toute matrice M vérifiant $P^d(M) = 0$ satisfait à $U(M)P'(M) = I$. Cette remarque sera utile par la suite.

Le théorème de Taylor avec reste intégral nous permet de donner une expression de $P(X + Y)$:

$$P(X+Y) = P(X) + YP'(X) + Y^2 \underbrace{\int_0^1 (1-t)P''(X+tY)\,\mathrm{d}t}_{\tilde{Q}(X,Y) \in \mathbb{R}[X,Y]}$$

La suite de Newton : On pose $A_0 = A$ et $A_{n+1} = A_n - P(A_n)(P'(A_n))^{-1}$.

Il faut pour cela vérifier que $P'(A_n)$ est toujours inversible. On va le montrer par récurrence ; posons :

$(HR)_n$ $\quad$ $(A_n)_n$ existe jusqu'au rang n, $A_n \in \mathbb{R}[A]$ et $\exists B_n \in \mathbb{R}[X], P(A_n) = P(A)^{2^n} B_n(A)$

Démonstration : L'initialisation est vérifiée. De plus si on suppose $(HR)_n$, alors $P^d(A_n) = P(A_n)^d = 0$ car $P(A)^d = 0$ et donc d'après la remarque précédente, on a toujours $U(A_n)P'(A_n) = I$. On a donc existence du terme A_{n+1}, reste alors à montrer l'expression de $P(A_{n+1})$, mais en notant $Y_n = P(A_n)U(A_n) \in \mathbb{R}[A]$, on a $P(A_{n+1}) = P(A_n - Y_n) = P(A_n) - Y_nP'(A_n) + Y^2\tilde{Q}(A_n, -Y_n)$.

Il est alors aisé de vérifier que $P(A_n) - Y_nP'(A_n) = 0$ et donc $P(A_{n+1}) = P(A_n)^2U(A_n)^2\tilde{Q}(A_n, -Y_n) = P(A)^{2^{n+1}}B_n^2(A)U(A_n)\tilde{Q}(A_n, -Y_n)$. Reste à poser $B_{n+1}(A) = B_n^2(A)U(A_n)\tilde{Q}(A_n, -P(A_n)U(A_n))$ qui est bien un polynôme de $\mathbb{R}[A]$. Ce qui achève la récurrence. ■

Convergence : On remarque qu'à partir d'un certain rang n, $2^n > d$, ainsi $P(A_n) = P(A)^{2^n}B_n(A) = 0$ car $P(A)^d = 0$. Donc $A_{n+1} = A_n$ et la suite stagne. Appelons $D = A_n$ cette limite. Comme $P(D) = P(A_n) = 0$, D possède un polynôme annulateur scindé à racines simples, elle est donc diagonalisable (sur $\mathbb{C}$).

Notons $N = A - D$, alors $N = A_0 - A_n = \sum_{k=0}^{n-1} A_k - A_{k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} P(A_k)U(A_k)$ or pour tout k, $P(A)$ divise $P(A_k)$ donc $P(A)$ divise N et donc $N^d = 0$.

N et D étant des polynômes en A, ils commutent et vérifient bien la décomposition de Dunford.

Seconde méthode

Cadre : On prend $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$. E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. La décomposition de Dunford de u nous donne l'existence et l'unicité de deux matrices $D, N \in \mathcal{L}(E)$ telles que :
- $u = D + N$.
- D diagonalisable (sur $\mathbb{C}$).
- N nilpotente.
- D et N commutent.

Ces matrices sont alors des polynômes en u.

preuve : On utilise toujours le lemme 1, pour trouver l'expression de P et surtout que $P \in \mathbb{K}[X]$. On se place alors dans l'anneau $\mathbb{K}[u] \cong \mathbb{K}[X]/(\pi_u)$.

P est alors un élément nilpotent et P' inversible (d'inverse U, obtenu par Euclide comme précédemment). On considère la suite dans $\mathbb{K}[u]$ définie par :

$$u_0 = u \quad \text{et} \quad u_{n+1} = u_n - U(u_n)P(u_n)$$

On montre de même par récurrence que u_n est un polynôme en u, que $P(u)$ divise $P(u_n)$, que $U(u_n)$ est bien l'inverse de $P'(u_n)$.

De la même manière la suite converge en temps fini et on a : $D = u_n$.

Algorithme : Dans le cas d'une matrice A de taille d, l'algorithme suivant calcule la décomposition de Dunford, en faisant appel à l'algorithme d'Euclide.

Les complexités de bases sont :
- Combinaison linéaire de polynômes de degrés k, k' : $O(k + k')$
- Dérivation d'un polynôme de degré k : $O(k)$
- Produit de polynômes de degrés k : $O(k\log(k))$ (algorithme de la FFT)
- Algorithme d'Euclide étendu pour les polynômes : $O(k\log(k)^2)$

– Combinaison linéaire de matrices $d \times d$: $O(d^2)$
– Produit de matrices $d \times d$: $O(d^3)$
– Calcul de déterminant : $O(d^3)$ par la méthode du pivot.

Algorithme 1 : Algorithme de décomposition

```
Entrées : A, d
début
    Calculer χ_A ;                                    /* Calcul de déterminant */
    Calculer χ_A ∧ χ'_A ;                             /* Euclide */
    Calculer P
    Calculer P'
    Calculer U, V tels que UP' + VP^d = 1 ;           /* Euclide étendu */
    Faire A_0 := A
    Faire flag := false
    Faire j := 0
    tant que j < d et non flag faire                  /* En réalité on a log(d) itérations */
        Calculer P(A_j) ;                             /* Évaluation polynomiale : O((d°P)d^3) */
        si P(A_j) = 0 alors
            flag := true
        sinon
            Calculer U(A_j) ;                         /* Évaluation polynomiale : O((d°P)^d d^3) */
            Calculer P(A_j)U(A_j)
            Faire A_{j+1} := A_j − P(A_j)U(A_j)
    retourner D = A_j et N = A − D
fin
```

La complexité est clairement donnée par l'évaluation du polynôme U en A_j ce qui nous donne une complexité totale de $n^d d^3 \log d$ où n est le nombre de valeurs propres distinctes de A et d sa dimension. On aurait pu améliorer, calculant $UP' + VP^m = 1$ avec m le max des multiplicités des valeurs propres de A, pour une complexité totale en $O(n^m d^3 \log d)$.

Recasements (pour l'option informatique)

– 124 – Polynômes d'endomorphisme en dimension finie ; applications à la réduction d'un endomorphisme en dimension finie.
– 128 – Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.
– (116 – Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.)