Théorème de Müntz

Kevin Quirin

Leçons :
– Déterminants
Prérequis :
– Distance à un sous-espace en fonction de déterminants de Gram
– Déterminants de Cauchy
– Théorème de Stone-Weierstraß

Théorème 0.1
Soit $(\mathscr{C}, ||\cdot||_2)$ l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$, mnui de la norme de L^2. Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante de réels positifs.

Alors on a l'équivalence :

(i) $V := \mathrm{Vect}\left((x \mapsto x^{\alpha_n})_{n\in\mathbb{N}}\right)$ est dense dans $\mathscr{C}$.

(ii) La série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{\alpha_n}$ diverge.

Démonstration. Par souci de clarté, on notera simplement x^a la fonction $x \mapsto x^a$.

Pour $m \in \mathbb{R}^+$, on note $\Delta_N(m)$ la distance de x^m à $\mathrm{Vect}(x^{\alpha_1}, \dots, x^{\alpha_N})$. On a donc, avec les déterminants de Gram :

$$\Delta_N(m)^2 = \frac{\mathrm{Gram}(x^m, x^{\alpha_1}, \dots, x^{\alpha_N})}{\mathrm{Gram}(x^{\alpha_1}, \dots, x^{\alpha_N})}.$$

Or, pour tous a et b, on a $\langle x^a, x^b\rangle = \frac{1}{a+b+1}$.

Donc :

$$\mathrm{Gram}(x^m, x^{\alpha_1}, \dots, x^{\alpha_N}) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2m+1} & \frac{1}{m+\alpha_1+1} & \cdots & \frac{1}{m+\alpha_N+1} \\ \frac{1}{m+\alpha_1+1} & \frac{1}{2\alpha_1+1} & \cdots & \frac{1}{\alpha_1+\alpha_N+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{m+\alpha_N+1} & \frac{1}{\alpha_N+\alpha_1+1} & \cdots & \frac{1}{2\alpha_N+1} \end{vmatrix}$$

On a donc, d'après le calcul du déterminant de Cauchy :

$$\mathrm{Gram}(x^m, x^{\alpha_1}, \dots, x^{\alpha_N}) = \frac{\left(\prod_{i<j}(\alpha_i - \alpha_j)^2\right)\left(\prod_i (\alpha_i - m)^2\right)}{(2m+1)\left(\prod_{i,j}(\alpha_i + \alpha_j + 1)\right)\left(\prod_i (\alpha_i + m + 1)^2\right)}$$

et, de la meme façon :

$$\mathrm{Gram}\left(x^{\alpha_1}, \dots, x^{\alpha_N}\right) = \frac{\prod_{i<j}(\alpha_i - \alpha_j)^2}{\prod_{i<j}(\alpha_i + \alpha_j + 1)}.$$

Finalement, on a l'expression de la distance cherchée :

$$\Delta_N(m) = \frac{1}{\sqrt{2m+1}} \prod_{i=1}^{N} \left| \frac{\alpha_i - m}{\alpha_i + m + 1} \right|.$$

Supposons que V est dense dans $\mathscr{C}$. Alors, pour tout $m \in \mathbb{R}^+$, on a $\Delta_N(m)$ tend vers 0, *i.e* $\sum_n u_n$ diverge, avec $u_n = \log\left(\frac{\alpha_n - m}{\alpha_n + m + 1}\right)$. Soit $m \in \mathbb{R}^+$.

Deux cas se présentent :
– Si $(\alpha_n)_n$ est majorée, $\sum \frac{1}{\alpha_n}$ diverge.
– Sinon, il existe un rang N_0 pour lequel $\alpha_n > m$ pour tout $n \geqslant N_0$. Alors

$$u_n \sim -\frac{2m+1}{\alpha_n}, \tag{$\star$}$$

et comme $\sum_n u_n$ diverge, $\sum \frac{1}{\alpha_n}$ diverge aussi.

Réciproquement, supposons que $\sum \frac{1}{\alpha_n}$ diverge. En montrant que $x^k \in \overline{V}$ pour tout entier k, on aura le résultat par théorème d'approximation de Stone-Weierstraß. Soit donc $k \in \mathbb{N}$.

Si $\alpha_n \to \infty$, alors l'équivalent ($\star$) suffit pour conclure.

Sinon :

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{N} \frac{|\alpha_i - m|}{\alpha_i + m + 1} &\leqslant \prod_{i=1}^{N} \frac{\alpha_i + m}{\alpha_i + m + 1} \\
&= \prod_{i=1}^{N} \left(1 - \frac{1}{\alpha_i + m + 1}\right) \\
&\leqslant \left(1 - \frac{1}{\sup_i \alpha_i + m + 1}\right)^n \\
&\to 0
\end{aligned}$$

□

Référence : Xavier Gourdon, Analyse, pp 286-287.

Remarque – Il y a deux erreurs dans le Gourdon :
– page 287, tout en haut : $\langle x^a, x^b \rangle = \frac{1}{a+b\boxed{+1}}$.
– page 287, dans l'expression du déterminant, il manque un carré :

$$\mathrm{Gram}\left(x^m, x^{\alpha_1}, \dots, x^{\alpha_N}\right) = \frac{\left(\prod_{i<j}(\alpha_i - \alpha_j)^2\right)\left(\prod_i (\alpha_i - m)^{\boxed{2}}\right)}{(2m+1)\left(\prod_{i,j}(\alpha_i + \alpha_j + 1)\right)\left(\prod_i (\alpha_i + m + 1)^2\right)}$$