La fonction d'Ackermann

Référence : Logique mathématique, tome 2.
René CORI, Daniel LASCAR.

2011-2012

Historique : Wilhem Ackermann, alors élève de Hilbert, proposa en 1928 un exemple de fonction récursive, non récursive primitive, à trois variables :

$$A(m,n,p) = m \to n \to p = m \uparrow^p n.$$

C'est en fait une fonction semblable, mais à seulement deux variables, proposée par Rózsa Péter qu'on appelle aujourd'hui *fonction d'Ackermann*.

Définition 1
On définit la fonction d'Ackermann ξ *ainsi :*
– *Pour tout entier x, $\xi(0,x) = 2^x$.*
– *Pour tout entier y, $\xi(y,0) = 1$.*
– *Pour tous entiers x et y, $\xi(y+1,x+1) = \xi(y,\xi(y+1,x))$.*
Pour chaque entier n, on note ξ_n la fonction $x \mapsto \xi(n,x)$, et on a alors :

$$\begin{cases} \xi_0(x) = 2^x \\ \xi_n(0) = 1 \\ \xi_n(x+1) = \xi_{n-1}(\xi_n(x)) \end{cases}$$

On voit avec la définition récursive des ξ_n que pour tout entier n, la fonction ξ_n est primitive récursive (par procédé de récurrence, sur n).

En revanche, cela n'implique pas que ξ est primitive récursive, et d'ailleurs :

Théorème 2
La fonction d'Ackermann ξ n'est pas primitive récursive.

Démonstration. On va montrer plein de lemmes techniques pour finalement montrer la fonction ξ domine toutes les fonctions primitives récursives.

Lemme 3
Pour tous n et x entiers,

$$\xi_n(x) > x.$$

Démonstration. Montrons-le par récurrence sur n.

Soit donc ϕ_n la proposition « Pour tout entier x, $\xi_n(x) > x$ ».

- Il est assez clair que ϕ_0.
- Soit n un entier. Supposons ϕ_{n-1}, et montrons ϕ_n. Pour cela, faisons une récurrence sur x.
  Soit donc ψ_x la proposition « $\xi_n(x) > x$ ».
  - ψ_0 est toujours clair.
  - Soit x un entier. Supposons ψ_{x-1} et montrons ψ_x.
    On a par définition $\xi_n(x) = \xi_{n-1}(\xi_n(x-1))$, et donc, par ϕ_{n-1} on a $\xi_n(x) > \xi_n(x-1)$, c'est-à-dire
    $$\xi_n(x) \geqslant \xi_n(x-1) + 1.$$
    D'après ψ_{x-1}, $\xi_n(x-1) > x-1$, d'où ψ_x

  On a donc ϕ_n.

Donc, par récurrence, on a le lemme. ◊

Lemme 4
Pour tout n, ξ_n est strictement croissante.

Démonstration. $\xi_0 = \lambda x.2^x$, donc ξ_0 est croissante.

Pour $n \geqslant 1$, on a la formule $\xi_n(x+1) = \xi_{n-1}(\xi_n(x))$, et donc par le lemme 3, $\xi_n(x+1) > \xi_n(x)$. ◊

Lemme 5
Pour tout $n \geqslant 1$, pour tout entier x, on a :

$$\xi_n(x) \geqslant \xi_{n-1}(x).$$

Démonstration. Par récurrence sur x :
- Pour $x = 0$, ouais.
- Pour l'hérédité :
  On a vu $\xi_n(x) \geqslant x + 1$, donc par croissance de ξ_{n-1}, on a
  $$\xi_{n-1}(\xi_n(x)) \geqslant \xi_{n-1}(x+1).$$
  Or par définition, $\xi_{n-1}(\xi_n(x)) = \xi_n(x+1)$, d'où le résultat.

◊

Définition 6
On note dans la suite ξ_n^k la fonction ξ_n itérée k fois.

Lemme 7
Les fonctions ξ_n^k sont strictement croissantes. De plus pour tous entiers m, n, k, h, x :

$$\begin{aligned} \xi_n^k(x) &< \xi_n^{k+1}(x) \\ \xi_n^k(x) &\geqslant x \\ \xi_n^k \circ \xi_n^h &= \xi_n^{k+h} \\ \textit{Si } m \leqslant n,\ \xi_m^k(x) &\leqslant \xi_n^k(x) \end{aligned}$$

Démonstration. C'est facile par récurrence. ◊

Définition 8
Soient $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *strictement croissante, et* $g : \mathbb{N}^p \to \mathbb{N}$*.*

On dit que f domine g *si pour tout* $(x_1, \ldots, x_p)$ *sauf un nombre fini,*

$$g(x_1, \ldots, x_p) \leqslant f(\sup(x_1, \ldots, x_p)).$$

On pose alors

$$C_n = \{g \mid \textit{il existe } k \textit{ tel que } g \textit{ soit dominée par } \xi_n^k\}.$$

On voit facilement que certaines fonctions sont dans C_0 : les projections, les constantes, la fonction successeur, les fonctions sup, l'addition, la multiplication par un entier.

On remarque aussi que $\xi_n \in C_n$, et si $f, g : \mathbb{N}^p \to \mathbb{N}$ telles $f(x_1, \ldots, x_p) \leqslant g(x_1, \ldots, x_p)$ pour tout $(x_1, \ldots x_p)$, alors $g \in C_n$ implique $f \in C_n$.

Si on montre que $C := \bigcup C_n$ est stable par composition et récurrence, alors C contiendra donc toutes les fonctions primitives récursives.

Lemme 9
Pour tout n*,* C_n *est clos par composition.*

Démonstration. Dans cette preuve, les inégalités seront pour tout uple, sauf un nombre fini.

Soient $f_1, \ldots, f_m : \mathbb{N}^p \to \mathbb{N}$ et $g : \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$ des fonctions de C_n.

Montrons que $g(f_1, \ldots, f_m)$ est dans C_n aussi.

On a l'existence de $k, k_1, \ldots, k_m$ tels que

$$g(y_1, \ldots, y_m) \leqslant \xi_n^k(\sup(y_1, \ldots, y_m))$$
$$f_i(x_1, \ldots, x_p) \leqslant \xi_n^{k_i}(\sup(x_1, \ldots, x_p))$$

Posons $h = \sup(k_1, \ldots, k_m)$.

On a alors par le lemme 7 :

$$g(f_1(x_1, \ldots, x_p), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_p)) \leqslant \xi_n^k(\xi_n^h(\sup(x_1, \ldots, x_p))),$$

d'où le résultat avec le lemme 7 à nouveau. ◊

Lemme 10
Pour tous entiers n, k *et* x*, on a :*

$$\xi_n^k(x) \leqslant \xi_{n+1}(x + k).$$

Démonstration. Par récurrence sur k. ◊

Lemme 11
Si $g : \mathbb{N}^p \to \mathbb{N}$ *et* $h : \mathbb{N}^{p+2} \to \mathbb{N}$ *sont dans* C_n*, alors* f *définie par récurrence à partir de* g *et* h *est dans* C_{n+1}*.*

Démonstration. Comme dans la preuve précédente, les inégalités seront pour tout uple sauf un nombre fini.

Les hypothèses sont :

$$g(x_1,\ldots,x_p) \leqslant \xi_n^{k_1}(\sup(x_1,\ldots,x_p))$$
$$h(x_1,\ldots,x_p,y,z) \leqslant \xi_n^{k_2}(\sup(x_1,\ldots,x_p,y,z))$$

Montrons par récurrence sur y la propriété $\Phi_y =$« $f(x_1,\ldots,x_p,y) \leqslant \xi_n^{k_1+yk_2}(\sup(x_1,\ldots,x_p,y))$ ».
– Φ_0 est évident.
– Supposons Φ_y et montrons Φ_{y+1}.
  On a

$$\begin{aligned} f(x_1,\ldots,x_p,y+1) &= h(x_1,\ldots,x_p,y,f(x_1,\ldots,x_p,y)) \\ &\leqslant \xi_n^{k_2}(\sup(x_1,\ldots,x_p,y,f(x_1,\ldots,x_p,y))) \\ &\leqslant \xi_n^{k_2}(\xi_n^{k_1+yk_2}(\sup(x_1,\ldots,x_p,y))) \text{ par le lemme 7 et hypothèse de récurrence} \end{aligned}$$

  D'où Φ_{y+1}, et donc Φ_y pour tout y.
En appliquant le lemme 10, on a :

$$f(x_1,\ldots,x_p,y) \leqslant \xi_{n+1}(\sup(x_1\ldots,x_p,y)+k_1+yk_2).$$

La fonction $\lambda x_1 x_2 \cdots x_p y.\xi_{n+1}(\sup(x_1,\ldots,x_p,y)+k_1+yk_2)$ est composée de fonctions de C_{n+1}, donc est C_{n+1}, et donc f aussi. ♢

Corollaire 12
C contient toutes les fonctions récursives primitives.

On peut maintenant montrer que ξ n'est pas primitive récursive.

Sinon, $\lambda x.\xi(x,2x)$ l'est aussi, donc est dans C :

Il existe n,k tels que pour tout x sauf un nombre fini, $\xi(x,2x) \leqslant \xi_n^k(x)$.

Donc on a $\xi(x,2x) \leqslant \xi_{n+1}(x+k)$ par le lemme 10.

De plus, pour x assez grand :

$$\begin{aligned} \xi_{n+1}(x+k) &< \xi_{n+1}(2x) \\ &< \xi_x(2x) \\ &= \xi(x,2x) \end{aligned}$$

D'où une contradiction. □