Décomposition de Bruhat

2011-2012

Définition 1
Un drapeau d'un espace vectoriel de dimension finie E *est une suite finie strictement croissante pour l'inclusion de sous-espaces vectoriels de E, le premier étant l'espace nul et le dernier E tout entier.*

Notation – On notera :
– T_s l'ensemble des matrices triangulaires supérieures inversibles ;
– P_σ la matrice de permutation associée à la permutation σ ;
– $\mathscr{D}$ l'ensemble des drapeaux d'un espace vectoriel.

Théorème 2
On a :

$$GL_n(\mathbb{K}) = \bigsqcup_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} T_s \sigma T_s.$$

Démonstration. Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$. Posons quelques notations :
– $E_{i,j}$ est la matrice dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui d'indices i, j ;
– pour $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $T_{i,j}(\lambda) = Id + \lambda E_{i,j}$;
– pour tout i et tout $\alpha \neq 0$, $D_i(\alpha) = Id + (\alpha - 1)E_{i,j}$.
Multiplier A à droite par $T_{i,j}(\lambda)$ revient à faire l'opération sur les colonnes $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$, et à gauche revient à faire l'opération sur les lignes $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$.

Multiplier A à droite par $D_i(\alpha)$ revient à faire l'opération sur les colonnes $C_i \leftarrow \alpha C_i$, et à droite revient à faire l'opération sur les lignes $L_i \leftarrow \alpha L_i$.

On applique l'algorithme suivant :

Soit i_1 le plus grand indice k tel que $a_{k,1} \neq 0$. On fait les opérations $L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{i,1}}{a_{i_1,1}} L_{i_1}$ pour $i \neq i_1$ et $C_j \leftarrow C_j - \frac{a_{i_1,j}}{a_{i_1,1}} C_1$.

Cela ne revient qu'à multiplier à gauche et à droite par des matrices de T_s. On termine par $C_1 \leftarrow \frac{1}{a_{i_1,1}} C_1$ pour être dans la situation :

$$\begin{pmatrix} 0 & & & \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \\ 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

On prend ensuite i_2 le plus grand indice k tel que $a_{k,2} \neq 0$. Notons que $i_2 \neq i_1$. Par les mêmes opérations, on annule les coefficients de la colonne 2 et de la ligne i_2 : cela ne modifie par les 0 de la colonne 1 et de la ligne i_1.

On itère le procédé, et on obtient une matrice de permutation P_σ, où σ est la permutation définie par $(1\ i_1\ i_{i_1}\ \cdots)$.

On a donc une décomposition $A = T_1 P_\sigma T_2$, $T_1, T_2 \in T_s$.

Supposons qu'on ait deux décompositions $T_1 P_\sigma = P_\tau T_2$.

Alors $T_2 = P_{\tau^{-1}} T_1 \P_\sigma$. Supposons $\sigma \neq \tau$: il existe i tel que $\sigma(i) < \tau(i)$.

Le coefficient i, i de T_2 est non nul car T_2 inversible, et l'égalité précédente nous donne l'égalité :

$$T_2(i,i) = T_1(\tau(i), \sigma(i)) = 0,$$

d'où une contradiction. □

Théorème 3
L'action de $GL_n(\mathbb{K})$ sur $\mathscr{D} \times \mathscr{D}$ possède $n!$ orbites.

Démonstration. $GL_n(\mathbb{K})$ agit à gauche sur $\mathscr{D}$, de façon transitive. Le stabilisateur du drapeau canonique est T_s, et donc $\mathscr{D}$ est en bijection avec le quotient $GL_n(\mathbb{K})/T_s$.

Soit $(A, B) \in GL_n(\mathbb{K})/T_s \times GL_n(\mathbb{K})/T_s$. Alors

$$\begin{aligned}(A,B) &\sim A(I_n, A^{-1}B) \\ &\sim A(I_n, T_1 P_\sigma T_2) \\ &\sim AT_1(I_n, P_\sigma).\end{aligned}$$

Donc chaque orbite a un élément de la forme (I_n, P_σ). Supposons qu'il existe $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$ dans une même orbite.

Alors il existe $A \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $(I_n, P_\sigma) = (A, AP_\tau)$.

Alors $A \in T_s$, et donc $\exists T \in T_s,\ AP_\tau = P_\sigma S$. Par décomposition de Bruhat, $\sigma = \tau$, ce qui est faux par hypothèse.

Donc on a une bijection entre les orbites et les permutations, d'où les $n!$ orbites. □