Dual de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Référence : Serge Francinou, Hervé Gianella, Serge Nicolas
Oraux X-ENS, Algèbre 1

2011-2012

On cherche ici à déterminer les formes linéaires de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Théorème 1
L'application

$$f: \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^* \\ A & \longmapsto & f_A \ : \ X \mapsto \operatorname{Tr}(AX) \end{array}$$

réalise un isomorphisme entre $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et son dual.

Démonstration. On note $(E_{i,j})_{i,j}$ la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

f est clairement linéaire, et les espaces sont de même dimension finie. Montrons donc l'injectivité de f.

Soit A telle que $f_A = 0$. On a alors, pour tous i_0, j_0 :

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr}(AE_{i_0,j_0}) &= \operatorname{Tr}\left(\sum_{i,j} a_{i,j} E_{i,j} E_{i_0,j_0}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{i,i_0} \operatorname{Tr}(E_{i,j_0}) \text{ car } E_{i,j}E_{k,l} = \delta_{j,k}E_{i,l} \\ &= a_{j_0,i_0} \\ &= 0 \text{ par hypothèse} \end{aligned}$$

Finalement, $A = 0$. □

Essayons maintenant, parmi toutes ces formes linéaires, de caractériser la plus connue, la *trace*.

Théorème 2
Soit $g \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^*$ vérifiant $g(XY) = g(YX)$ pour toutes matrices X et Y. Alors

$$\exists \lambda \in \mathbb{K},\ \forall X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ g(X) = \lambda \operatorname{Tr}(X).$$

Démonstration. D'après le théorème précédent, il existe donc une matrice A telle que $g(X) = \operatorname{Tr}(AX)$.

L'hypothèse nous donne donc

$$\operatorname{Tr}(AXY) = \operatorname{Tr}(AYX).$$

Or les propriétés de la trace nous permettent d'écrire :

$$\mathrm{Tr}(AYX) = \mathrm{Tr}(XAY).$$

Finalement, on a

$$\mathrm{Tr}((AX - XA)Y) = 0,$$

et ce pour tout matrice Y.

En réutilisant l'isomorphisme précédent, on a donc $AX = XA$, et comme il est connu que le centre de $\mathscr{L}(E)$ est l'ensemble des homothéties, A en est donc une. □

Il est maintenant temps d'utiliser la correspondance forme linéaire $\leftrightarrow$ hyperplan.

Théorème 3
Si $n \geqslant 2$, alors tout hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ rencontre $GL_n(\mathbb{K})$.

Démonstration. Soit donc H un hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, et soit φ la forme linéaire associée. Il existe donc une matrice A telle que pour toute matrice X, on ait $\varphi(X) = \mathrm{Tr}(AX)$.

On cherche donc une matrice inversible, telle que $\mathrm{Tr}(AX)$ soit nulle.

Pour simplifier le problème, notons r le rang de A. A est donc équivalente à J_r : $PAQ = J_r$, où P et Q sont inversibles.

On a donc, pour toute matrice X,

$$\mathrm{Tr}(AX) = \mathrm{Tr}(PJ_rQX) = \mathrm{Tr}(J_rQXP).$$

Si on trouve Y inversible telle que $\mathrm{Tr}(J_rY)$ soit de trace nulle, on a gagné (on pose $X = Q^{-1}YP^{-1}$ qui reste à la fois dans $GL_n(\mathbb{K})$ et dans l'hyperplan H (on vérifie $\mathrm{Tr}(AX) = 0$)).

Pour cela, on peut par exemple poser

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

et vérifier que J_rY a sa diagonale nulle, donc sa trace aussi. □