Intégrale de Fresnel

Référence : Les maths en tête, analyse. Xavier GOURDON

2011-2012

On pose dans la suite :

$$F(t) = \iint_{[0,t]^2} e^{i(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$f(t) = \int_0^t e^{ix^2}\mathrm{d}x$$
$$I(T) = \frac{1}{T}F(t)\mathrm{d}t$$

On cherche à montrer :

Théorème 1
L'intégrale de Fresnel vaut :

$$\int_0^\infty e^{ix^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{i\pi/4}.$$

Démonstration. Il est assez clair que $F(t) = f(t)^2$. Calculons-la d'une autre manière.

$[0,t]^2$ est symétrique par rapport à la première bissectrice, et donc, en posant $\Delta_t = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant y \leqslant x \leqslant t\}$:

$$F(t) = 2\iint_{\Delta_t} e^{i(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

La vision de x^2+y^2 donne très envie de passer en polaire. Δ_t devient alors

$$K_t = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^+ \times [0, \frac{\pi}{4}] \mid 0 \leqslant r\cos\theta \leqslant t\}.$$

On a donc, par changement de variables :

$$F(t) = \iint_{K_t} e^{ir^2} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta.$$

Par théorème de Fubini (on est sur un compact) :

$$\begin{aligned} F(t) &= 2\int_0^{\pi/4}\left(\int_0^{t/\cos\theta} e^{ir^2} r\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{\pi/4}\frac{1}{i}\left(\exp\left(i\frac{t^2}{\cos^2\theta}\right) - 1\right) \\ &= \frac{i\pi}{4} - i\int_0^{\pi/4}\exp\left(i\frac{t^2}{\cos^2\theta}\right)\mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

On a donc, en utilisant à nouveau le théorème de Fubini :

$$I(t) = \frac{i\pi}{4} - \frac{i}{T}\int_0^{\pi/4} \cos(\theta) f\left(\frac{T}{\cos\theta}\right).$$

Lemme 2
$\varphi = \int_0^\infty e^{ix^2}\mathrm{d}x$ *est semi-convergente.*

Démonstration. On pose $u = x^2$. Alors :

$$\varphi = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{iu}u^{-1/2}\mathrm{d}u$$

qui est semi-convergente (faire une intégration par parties). $\Diamond$

f est donc bornée sur $\mathbb{R}^+$, et donc I converge vers $\frac{i\pi}{4}$ en $+\infty$.
Par ailleurs, on a

$$I(T) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)^2\mathrm{d}t,$$

, et $f(t)^2$ converge vers φ^2 en $+\infty$, donc, par théorème de Césaro, I converge vers φ^2 en $+\infty$.
Finalement, $\varphi = \pm\frac{\sqrt{\pi}}{4}e^{i\pi/4}$. Il ne nous reste qu'à trouver le signe. Pour cela, regardons

$$s = \mathrm{Im}(\varphi) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \sin(x)x^{-1/2}\mathrm{d}x.$$

On peut écrire

$$\begin{aligned} s &= \sum \int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} \frac{\sin u}{2\sqrt{u}}\mathrm{d}u \\ &= \sum \int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} \frac{\sin u}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{u}} - \frac{1}{\sqrt{u+\pi}}\right)\mathrm{d}y \end{aligned}$$

et chaque terme de la somme est positif.
D'où le résultat.

$\square$