Lemme de Morse

Référence : François Rouvière,
Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation.

2011-2012

Théorème 1 : Lemme de Morse
Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^3$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ contenant l'origine. On suppose que 0 est un point critique quadratique non dégénéré de f, i.e $\mathrm{d}f(0) = 0$ et $\mathrm{d}^2 f(0)$ non dégénérée de signature $(p, n-p)$.

Alors il existe un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme $x \mapsto u = \varphi(x)$ entre deux voisinages de l'origine dans $\mathbb{R}^n$ tel que $\varphi(0) = 0$ et

$$f(x) = f(0) + u_1^2 + \cdots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \cdots - u_n^2.$$

Démonstration. On écrit la formule de Taylor avec reste intégral au premier ordre pour f, pour $x \in V_0$ voisinage de 0 :

$$f(x) = f(0) + {}^t Q(x)x,$$

où

$$Q(x) = \int_0^1 (1-t)\mathrm{d}^2 f(tx)\mathrm{d}t.$$

Par théorème de dérivation sous intégrale (f est supposée de classe $\mathscr{C}^3$), Q est de classe $\mathscr{C}^1$.

Le théorème de réduction $\mathscr{C}^1$ des formes quadratiques nous donne l'existence d'une fonction $M : V_0 \to GL_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que

$$Q(x) = {}^t M(x)Q(0)M(x).$$

On en déduit, en notant $y = M(x)x$:

$$f(x) = f(0) + {}^t y Q(0) y.$$

Or la signature de $Q(0)$ est la même que celle de $\mathrm{d}^2 f(0)$: $(p, n-p)$. Donc par changement de base :

$$\exists A \in GL_n(\mathbb{R}),\ Q(0) = {}^t A \operatorname{diag}(I_p, I_{n-p})A.$$

Finalement,

$$f(x) = f(0) + {}^t(Ay)Q(0)(Ay).$$

Pour conclure, en posant $u = \varphi(x) = AM(x)x$, on a le résultat souhaité :

$$f(x) = f(0) + u_1^2 + \cdots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \cdots - u_n^2.$$

Montrons que φ est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme.

Soit $\psi : x \to M(x)x$.

On a alors $\mathrm{d}\psi(0) = M(0)$, avec $M(0)$ inversible. Donc ψ un est $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme au voisinage de 0. Comme A est aussi inversible, φ l'est aussi. $\square$

Théorème 2 : Réduction $\mathscr{C}^1$ des formes quadratiques
On note S l'espace des matrices symétriques de taille $n \times n$. Pour $A_0 \in S$ inversible fixé, on pose

$$\alpha : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & S \\ M & \longmapsto & {}^tMA_0M \end{array}.$$

Alors il existe un voisinage V de A_0 dans S, et une application $\begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & GL_n(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & M \end{array}$ de classe $\mathscr{C}^1$ tel que $A = {}^tMA_0M$ pour tout A de V.

Démonstration. L'application α est polynomiale donc de classe $\mathscr{C}^1$. Calculons sa différentielle :

$$\begin{aligned} \alpha(I+H) - \alpha(I) &= {}^tHA_0 + A_0H + {}^tHA_0H \\ &= {}^t(A_0H) + A_0H + \mathscr{O}(\|H\|^2) \end{aligned}$$

Donc

$$\mathrm{d}\alpha(I)H = {}^t(A_0H) + A_0H.$$

Le noyau de $\mathrm{d}\alpha(I)$ est donc $\{H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid A_0H \text{ antisymétrique}\}$, de dimension $n(n-1)/2$. Donc l'image est de dimension $n(n+1)/2 = \dim S$, et donc $\mathrm{d}\alpha(I)$ est surjective.

On note maintenant α la restriction de α à $F = \{H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid A_0H \in S\}$.

Alors α est toujours de classe $\mathscr{C}^1$, mais maintenant $\mathrm{d}\alpha(I)$ est inversible.

Par théorème d'inversion locale, on a un voisinage U de I dans F (quitte à restreindre U, on le choisit inclu dans $GL_n(\mathbb{R})$) avec α $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de U sur $V = \alpha(U)$.

Donc pour tout A de V, il existe un unique $M \in U$ tel que $A = \alpha(M) = {}^tMA_0M$. $\square$

Remarque – Ce théorème nous dit que pour une forme quadratique non dégénérée, les formes quadratiques assez proche lui sont équivalentes.