Méthode de Newton pour les polynômes.

Référence : Analyse 2, Exercices.
Antoine Chambert-Loir et Stéfane Fermigier

2011-2012

Soit $\xi_1 < \ldots < \xi_r$ des réels, et $m_1 \ldots, m_r$ des entiers non nuls. On considère le polynôme

$$P = \prod_{i=1}^{r} (X - \xi_i)^{m_i}.$$

On choisit un $x_0 > \xi_r$, et on considère la suite $(x_n)_n$ définie par

$$x_{n+1} = f(x_n),$$

où

$$f(x) = x - \frac{P(x)}{P'(x)}.$$

Alors la suite (x_n) converge vers ξ_r, et on a une estimation de la vitesse de convergence :
– si $m_r = 1$, alors pour tout $c > 0$,

$$|x_n - \xi_r| = o(c^n).$$

– si $m_r > 1$, alors il existe $c > 0$ telle que

$$|x_n - \xi_r| \sim c\left(1 - \frac{1}{m_r}\right)^n.$$

Démonstration. On reconnait en P'/P la dérivée logarithmique de P, et donc on a

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{i=1}^{r} \frac{m_i}{x_n - \xi_i}.$$

La relation $x_{n+1} = f(x_n)$ se réécrit donc

$$x_{n+1} = x_n - \left(\sum_{i=1}^{r} \frac{m_i}{x_n - \xi_i}\right)^{-1}.$$

Donc, si $x_n > \xi_r$, alors $x_{n+1} < x_n$. Il ne nous reste donc qu'à montrer que $x_{n+1} > \xi_r$ pour avoir la décroissance de (x_n).

On peut prolonger f à $I := [\xi_r, \infty)$ (ξ_r est une racine de P' d'ordre 1 de moins que de P, et donc $P(\xi_r)/P'(\xi_r) = 0$) en posant $f(\xi_r) = \xi_r$.

f est dérivable sur I :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - 1 + \frac{P(x)P''(x)}{P'(x)^2} \\ &= \frac{PP''}{P'^2}(x) \end{aligned}$$

Comme les zéros de P sont dans $[\xi_1, \xi_r]$, il en est de même pour les zéros de P' et P'' (théorème de Gauß-Lucas), et donc (les coefficients sont positifs) f est strictement croissante sur I.

On a donc, pour $x_n > \xi_r$:

$$\xi_r = f(\xi_r) < f(x_n) = x_{n+1}.$$

Finalement, la suite (x_n) est décroissante et minorée, et donc converge, nécessairement vers un point fixe de f : ξ_r.

Intéressons-nous maintenant à la vitesse de convergence de la suite.

Commençons par calculer $f'(x)$ plus précisemment. On a vu

$$\frac{P'}{P}(x) = \sum_i \frac{m_i}{x - \xi_i},$$

et donc en dérivant :

$$\frac{PP'' - P'^2}{P^2}(x) = -\sum_i \frac{m_i}{x - \xi_i}^2.$$

Donc

$$f'(x) = \frac{PP''}{P'^2}(x) = 1 - \left(\sum_i \frac{m_i}{x - \xi_i}\right)^{-2} \left(\sum_i \frac{m_i}{(x - \xi_i)^2}\right).$$

On peut en déduire

$$\lim_{x \to \xi_r} f'(x) = 1 - \frac{1}{m_r}.$$

Regardons d'abord le cas $m_r = 1$. On a donc $f'(\xi_r) = 0$. Donc, par théorème de Taylor-Lagrange, il existe un y_n tel que $f(x_n) - f(\xi_r) = (x_n - \xi_r)f'(y_n)$.

On a donc $f'(y_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$, et donc, si $c > 0$, l'existence d'un rang à partir duquel $|f'(y_n)| < c$.

Donc $|x_{n+1} - \xi_r| \leqslant c|x_n - \xi_r|$, et une récurrence immédiate nous donne

$$|x_n - \xi_r| = \mathscr{O}(c^n).$$

Quitte à réécrire l'égalité avec un $c' < c$, on peut remplacer $\mathscr{O}$ par o.

Il nous reste le cas $m_r > 1$. On a donc $f'(\xi_r) = 1 - \frac{1}{m_r} \in (0, 1)$. On peut à nouveau appliquer la formule de Taylor-Lagrange :

$$\exists y_n \in (\xi_r, x_n),\ x_{n+1} - \xi_r = f'(y_n)(x_n - \xi_r).$$

En passant au log :

$$\log(x_{n+1} - \xi_r) - \log(x_n - \xi_r) = \log f'(y_n) \xrightarrow[n]{} \log f'(\xi_r).$$

Ainsi, par théorème de Cesáro, on a
$$\log(x_n - \xi_r) \sim n \log f'(\xi_r).$$

Cependant, il est interdit de prendre l'exponentielle pour conclure. Montrons donc que $\log(x_n - \xi_r) - n\log(\xi_r)$ converge.

On peut à nouveau appliquer la formule de Taylor-Lagrange, à l'ordre 2 :

$$\exists z_n \in (\xi_r, x_n),\ x_{n+1} - \xi_r = f'(\xi_r)(x_n - \xi_r) + \frac{f''(z_n)}{2}(x_n - \xi_r)^2.$$

On a en particulier
$$\varepsilon_n := \frac{x_{n+1} - \xi_r}{f'(\xi_r)(x_n - \xi_r)} - 1 = \mathscr{O}(x_n - \xi_r).$$

Comme on a vu $\log(x_n - \xi_r) \sim n\log(f'(\xi_r))$, donc il existe une constante $f'(\xi_r) < c < 1$ telle que $|x_n - \xi_r| = \mathscr{O}(c^n)$.

On a donc $\log(1+\varepsilon_n) = \mathscr{O}(c^n)$, et comme la série de terme général c^n converge, celle de terme général $\log(x_{n+1} - \xi_r) - \log(x_n - \xi_r) - \log f'(\xi_r)$ aussi. Par série téléscopique, c'est exactement dire que $\log(x_n - \xi_r) - n\log(f'(\xi_r))$ converge, vers un certain λ.

On conclut :
$$x_n - \xi_r \sim e^{\lambda} f'(\xi_r)^n.$$

$\square$