# Action du groupe modulaire sur le demi-plan de Poincarré

Références : Thèmes de géométrie ; Groupes en situation géométrique.
Michel Alessandri
Oraux X-ENS, Algèbre 1

2011-2012

On appelle *demi-plan de Poincaré* l'ensemble $P = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0\}$.

On fait agir $SL_2(\mathbb{Z})$ sur $P$ par l'action :

$$\forall A \in SL_2(\mathbb{Z}),\ \forall z \in P,\ A * z = \frac{az+b}{cz+d}.$$

On appelle en particulier $S$ et $T$ les matrices

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalement, on appelle *groupe modulaire* le groupe

$$PSL_2(\mathbb{Z}) = SL_2(\mathbb{Z})/_{\{\pm I\}}.$$

On fait agir ce groupe sur $P$ de la même manière que $SL_2(\mathbb{Z})$. On remarquera que cette action est fidèle (seul le neutre fixe tous les points).

On cherche à montrer

**Théorème 1**
*Le groupe $SL_2(\mathbb{Z})$ est engendré par $S$ et $T$.*

*Démonstration.* On appelle $D$ l'ensemble

$$D = \left\{ z \in P \mid |z| \geqslant 1 \text{ et } |\Re(z)| \leqslant \frac{1}{2} \right\},$$

et $G$ le sous-groupe de $SL_2(\mathbb{Z})$ engendré par $S$ et $T$.

On cherche donc à montrer que $G = SL_2(\mathbb{Z})$. Commençons par étudier $D$.

**Lemme 2**
*On fait agir $G$ sur $P$ via l'action de $SL_2(\mathbb{Z})$. Alors pour cette action de $G$, toutes les orbites rencontrent $D$.*

*Démonstration.* On se fixe $z \in P$. On va construire un point de $P$ qui est dans $D$ à partir de $z$ ; pour cela, on va faire "monter" $z$, puis le translater.

On remarque qu'il n'y a qu'un nombre fini de couples $(c, d) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $|cz + d| \leqslant 1$. En effet

$$|c|\Im(z) = |\Im(cz + d)| \leqslant |cz + d| \leqslant 1,$$

et donc $|c| \leqslant 1/\Im(z)$ et $|d| \leqslant 1 + |c||z|$.

On a, pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dans $G$,

$$\Im(A * z) = \frac{\Im(z)}{|cz + d|^2}.$$

Comme le nombre de couples $(c, d)$ vérifiant $\Im(A * z) \geqslant \Im(z)$ est fini, il existe $A_1 \in G$ telle que $\Im(A_1 * z)$ soit maximal. On appelle $z_1 = A_1 * z$.

Soit $n$ la partie entière de $\Re(z_1) + 1/2$.

Comme pour tout $u$ de $P$, on a $T * u = u + 1$, on a :

$$-\frac{1}{2} \leqslant \Re(z_1) - n \leqslant \Re(z_1 - n) \leqslant \Re(T^{-n} * z_1) \leqslant \frac{1}{2},$$

avec $\Im(T^{-n} * z_1) = \Im(z_1)$.

En posant $z_2 = T^{-n} * z_1$), il ne nous reste plus qu'à montrer $|z_2| \geqslant 1$.

Sinon, $\Im(S * z_2) = \frac{\Im(z_2)}{|z_2|^2}$, ce qui contredit la maximalité de $\Im(z_2)$. $\Diamond$

On chercher maintenant à caractériser, pour $z \in D$ fixé, les matrices $A$ de $SL_2(\mathbb{Z})$ telles que $A * z \in D$.

Fixons-nous donc $z \in D$, et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dans $SL_2(\mathbb{Z})$ tels que $A * z \in D$.

**Lemme 3**
*$A$ est une matrice de $G$.*

*Démonstration.* On peut se restreindre au cas où $\Im(A*z) \geqslant \Im(z)$, *i.e* $|cz+d| \leqslant 1$ : sinon $\Im(A*z) < \Im(A^{-1}*(A*z))$ et donc on peut faire la même étude pour $A^{-1}$.

D'après les calculs qu'on a fait plus tôt, on a

$$|c| \leqslant \frac{1}{\Im(z)} \leqslant \frac{2}{\sqrt{3}} < 2$$

et donc $c \in \{-1, 0, 1\}$.

Cas $c = 0$ : On a $\det(A) = ad = 1$, et donc, quitte à changer $A$ et $-A$ (ce qui ne change pas la valeur de $A * z$), on a $a = d = 1$, et donc $A * z = z + b$. Regardons où est $z$ dans $D$.
- Si $|\Re(z)| < \frac{1}{2}$, alors $b = 0$ et donc $A = \pm I$.
- Si $|\Re(z)| = -\frac{1}{2}$, alors $b = 0$ ou 1, et donc $A = \pm I$ ou $T$.
- Si $|\Re(z)| = \frac{1}{2}$, alors $b = 0$ ou -1, et donc $A = \pm I$ ou $T^{-1}$.

Cas $c = 1$ : La condition $|z + d| \leqslant 1$ n'offre que trois possibilités (dessiner $D$) :
(i) $d = 0$ ;
(ii) $z = j$ et $d = 1$ ;
(iii) $z = -\frac{1}{j}$ et $d = -1$.

(i) On a $\det(A) = -b = 1$, et $A * z = a - \frac{1}{z}$.
Comme de plus, $|z| \leqslant 1$ et $z \in D$, nécessairement $|z| = 1$, et donc $-\frac{1}{z}$ et le symétrique de $z$ par rapport à l'axe des imaginaires. $a - \frac{1}{z}$ est donc dans $D$ seulement si
- $a = 0$
- $z = j$ et $a = -1$
- $z = -\frac{1}{j}$ et $a = 1$

Ces trois possibilités mènent à
- $A = S$
- $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (ST)^2$
- $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = TS$.

(ii) $\det(A) = a - b = 1$ et

$$A * z = \frac{aj + (a-1)}{j+1} = a + j,$$

qui est dans $D$ seulement si $a = 0$ ou $a = 1$, ce qui mène à

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = ST \text{ ou } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = TST.$$

(iii) On conclut de la même façon

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = (TS)^2 \text{ ou } A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = TST.$$

On se ramène à $c = 1$ en changeant $A$ en $-A$.

$\Diamond$

On peut maintenant terminer la preuve :

Le cas où $z$ est dans l'intérieur de $D$ ne se rencontre que dans le cas $c = 0$, et impose $A = \pm I$.

Soit $A$ une matrice de $SL_2(\mathbb{Z})$. Notons $z' = A * z \in P$. Alors par le lemme 2, il existe $B \in G$ telle que $B * z' \in D$, *i.e* $(BA) * z \in D$.

On a donc $BA = \pm I$, *i.e* $A = \pm B^{-1}$. Comme $-I = S^2$ est dans $G$, on a bien $A \in G$, et par suite $G = SL_2(\mathbb{Z})$.

$\square$