Indécidabilité de la terminaison d'un système de réécriture.

Frédéric Valet

26 janvier 2015

Théorème 1. *On définit le problème de terminaison $TERM$ suivant :*
<u>Entrée :</u> Un système de réécriture R fini.
<u>Sortie :</u> Oui s'il est terminant.
Ce problème est indécidable.

Démonstration. **Premier temps :** On considère le problème de terminaison $TERM'$ suivant :
<u>Entrée :</u> Un système de réécriture R fini et un terme t.
<u>Sortie :</u> Oui si toutes les réécritures possibles commençant par t terminent.

Pour montrer que ce problème est indécidable, on va réduire le problème de l'arrêt à $TERM'$. Soit donc une instance : une machine de Turing M et K une configuration.
M est composée :
- d'un alphabet $\Gamma := \{s_0, s_1, \cdots, s_n\}$ fini, avec $s_0 = \#$, le symbole blanc du ruban.
- D'un ensemble d'états $Q = \{q_0, \cdots, q_r\}$ fini.
- De 2 symboles $\{l, r\}$ pour la manière de se déplacer sur le ruban.
- D'une fonction de transition finie : $\Delta \subset Q * \Gamma * Q * \Gamma * \{l, r\}$.

Soit l'alphabet $\Sigma_M := \{\overrightarrow{s_0}, \cdots, \overrightarrow{s_n}, \overleftarrow{s_n}, \cdots, \overleftarrow{s_0}\} \bigcup Q \bigcup \{\overrightarrow{l}, \overleftarrow{r}\}$, toutes ces fonctions étant d'arité 1. Soit x une variable ; on définit les termes de configuration par :

$$t := \overrightarrow{l}(\overrightarrow{s_{i_k}}(\cdots(\overrightarrow{s_{i_1}}(q(\overleftarrow{s_{j_1}}(\cdots(\overleftarrow{s_{j_l}}(\overleftarrow{r}(x))\cdots).$$

Ce terme de configuration correspond à la configuration suivante de la machine de Turing M : on est dans l'état q, et on a sur le ruban (la flèche correspondant à la tête de lecture) :

$\#$	$\#$	s_{i_k}	$\cdots$	s_{i_1}	s_{j_1}	$\cdots$	s_{j_l}	$\#$	$\#$
					$\uparrow$				

On remarque que pour une configuration, on peut ajouter de $s_0 = \#$ à gauche et à droite, ceci signifie que plusieurs termes de configurations peuvent correspondre à la même configuration.
Les transitions correspondront à notre système de réécriture. Soit (q, s_i, q', s_j, r) une transition. La réécriture associée est :
- $q(\overleftarrow{s_i}(x)) \rightarrow_R \overrightarrow{s_j}(q'(x))$.
- Si $s_i = s_0$: $q(\overleftarrow{r}(x)) \rightarrow_R \overrightarrow{s_j}(q'(\overleftarrow{r}(x)))$.

Soit à présent une autre transition (q, s_i, q', s_j, l) :
- $\overrightarrow{l}(q(\overleftarrow{s_i}(x))) \rightarrow_R \overrightarrow{l}(q'(\overleftarrow{s_0}(\overleftarrow{s_j}(x))))$.
- Pour tout k, $\overrightarrow{s_k}(q(\overleftarrow{s_i}(x))) \rightarrow_R q'(\overleftarrow{s_k}(\overleftarrow{s_j}(x)))$.
- Si $s_i = \#$, alors $\overrightarrow{l}(q(\overleftarrow{r}(x))) \rightarrow_R \overrightarrow{l}(q'(\overleftarrow{s_0}(\overleftarrow{s_j}(\overleftarrow{r}(x)))))$.
- Si $s_i = \#$, alors pour tout k, $\overrightarrow{s_k}(q(\overleftarrow{r}(x))) \rightarrow_R q'(\overleftarrow{s_k}(\overleftarrow{s_j}(\overleftarrow{r}(x))))$.

Puisque la fonction de transition est finie, le système de réécriture est lui aussi fini.

Lemme 2. *Soit M une machine de Turing et R le système de réécriture associé. Alors*
- *Pour tout (t, t') couple de termes de configurations, $t \vdash_R t'$ implique $K_t \vdash_M K_{t'}$.*
- *Pour tout (K, K') couple de configurations, pour tout t terme tel que $K = K_t$, alors $K \vdash K'$ implique qu'il existe un terme de configuration t' tel que $K' = K_{t'}$ et $t \vdash_R t'$.*

Cependant, la deuxième affirmation n'est pas la réciproque de la première ! En effet, à chaque configuration, on peut associer une infinité de termes de configuration.
Ceci montre qu'on a réduit le problème de l'arrêt au problème $TERM'$, où le terme d'une instance de $TERM'$ est un terme de configuration.

Second temps. On va réduire le problème de l'arrêt uniforme (étant donnée une machine de Turing M, toutes les configurations terminent-elles ?) au problème $TERM$.
Soit donc une machine de Turing M, et on crée de la même manière que précédemment un système de réécriture associé R. Cependant, tous les termes du nouveau langage créé ne sont pas forcément des termes de configuration !

Lemme 3. *Soit un terme sur Σ_M. Si on a une infinité de réduction $t \to_R t_1 \to_R t_2 \to_R \cdots$, alors il existe un terme de configuration t' et une réduction infinie sur t' commençant avec t'.*

Démonstration. Les symboles sont d'arité 1, on peut sans problème enlever les parenthèses. Pour un terme $t = w(x)$, on va décomposer w de la forme suivante :

$$w = u_1 v_1 u_2 v_2 \cdots u_q v_q u_{q+1},$$

où $v_j \in \overrightarrow{\Gamma}^* Q \overleftarrow{\Gamma}^*$ et $u_j \in (\overrightarrow{\Gamma} \cup \overleftarrow{\Gamma} \cup \{\overrightarrow{l}, \overleftarrow{r}\})^*$, vérifiant :

$$\forall i \in [|1;q|]\ ,\ u_i \text{ ne termine pas par } \overrightarrow{s_j}, \forall i \in [|2;q+1|]\ ,\ u_i \text{ ne commence pas par } \overleftarrow{s_j}.$$

Dans cette décomposition, tous les q de t se trouvent dans les v_j.

Affirmation 4. *Si $w(x) \in T(\Sigma_M)$, soit $w = u_1 v_1 u_2 v_2 \cdots u_q v_q u_{q+1}$ la décomposition définie précédemment. On suppose que $w(x) \to_R w'(x)$. Alors :*

$$\exists j \in [|1,q|]\ ,\ v'_j \in \overrightarrow{\Gamma}^* Q \overleftarrow{\Gamma}^* \textit{ tels que } w' = u_1 v_1 \cdots u_j v'_j u_{j+1} \cdots u_q v_q u_{q+1} \textit{ et } \overrightarrow{l} v_j \overleftarrow{r}(x_0) \to \overrightarrow{l} v'_j \overleftarrow{r}(x_0).$$

Puisque le nombre de q dans w est fini, il existe un j tel qu'on ait une infinité de réductions sur $\overrightarrow{l} v_j \overleftarrow{r}(x_0)$. Puisque $\overrightarrow{l} v_j \overleftarrow{r}(x_0)$ est un terme de configuration, cela prouve le lemme. □

On a bien finalement une réduction de l'arrêt uniforme vers $TERM$, et $TERM$ est indécidable. □