

# **Dynamiques d'Opinions sur les Réseaux Sociaux**

## *Opinions Dynamics on Social Networks*

Valentin KILIAN  
Ecole Normale Supérieure de Rennes,

Stage sous la direction de Benjamin GUEDJ (Inria et UCL<sup>1</sup>)  
et d'Antoine VENDEVILLE (UCL)

26 octobre 2021

1. University College of London

## Résumé

Les dynamiques d'opinions sur les réseaux sociaux sont des phénomènes importants dont la généralité s'étend bien au-delà de la sphère digitale. Les applications dans de nombreux domaines tel que l'épidémiologie, la physique statistique, l'économie ou la sociologie motivent l'étude rigoureuse et approfondie de ces phénomènes avec comme objectifs sous jacents la compréhension puis la manipulation de ces dynamiques.

Dans ce rapport nous nous intéressons à certains des modèles de dynamiques d'opinions les plus connus. Après une brève analyse de quelques modèles historiques (DEGROOT, FRIEDKIN et AXELROD) nous nous sommes intéressés plus particulièrement à deux modèles : le *voter model* avec *stubborn agent* et le modèle de Deffuant.

On explique comment les marches aléatoires fusionnantes, problème dual du *voter model*, permettent de calculer l'opinion moyenne au sein d'un réseau social ouvrant ainsi des pistes à l'optimisation de certaines méthodes visant à modifier l'opinion au sein du groupe.

La majorité de notre propos se tient autour du modèle de Deffuant. On commence par reproduire quelques observations classiques dans le cas du graphe complet et du graphe grille. Notre apport personnel prend la forme d'une analyse numérique complète dans le cas du graphe *scale free*, une forme de graphe très intéressante dans la mesure où on l'observe très souvent dans la nature. On continue notre étude en étudiant quelques résultats autour de la probabilité de consensus quand le graphe est connexe.

Au cours de nos observations nous avons constaté un pic de variance dans le tracé de l'opinion à l'équilibre pour les graphes non complets. Ce phénomène ne semble jamais avoir été décrit et nécessitera une plus ample étude afin de le comprendre.

**Mots clés** Dynamiques d'opinions, Réseau, Réseaux sociaux, modèle de Deffuant, Graphe *scale free*, Consensus, Pic de variance, *Voter model*, *Stubborn agent*, Marche aléatoire fusionnante

## Abstract

Opinion dynamics on social network are important phenomena whose generality extend far beyond the digital world. Application in various areas such as epidemiology, statistical physics, economy or sociology motivate a deep and rigorous study of these phenomena with the underlying goals to understand then manipulates those opinion dynamics.

In this report some of the most famous opinion dynamics' models are analyzed. After a brief revue of some historical model (DEGROOT, FRIEDKIN et AXELROD) we focus our attention on two models : the voter model with stubborn agent and the Deffuant model.

We show how the collapsing random walk, the dual problems of voter model allow the calculation of the average opinions in the social network which open some lead for optimized process to manipulate opinion.

The majority of our work deals with the Deffuant model. First we reproduce classic observations in the case of fully connected and square lattice graphs. Our personal contribution is the numerical analysis of this model in the case of a scale free graph, a graph very common in nature which make it very interesting. We also present some results on the probability of consensus in the case of a connexe graph.

During our observations we notice a variance peak in the opinion at the equilibrium in not fully connected graph. This phenomenon has not been describe until now and further studies will be necessary in order to understand it.

**Key words** Opinions dynamics, Network, Social network, Deffuant model, Scale free graph, Consensus, Variance peak, Voter model, Stubborn agent, Collapsing random walk

# Table des matières

<b>1 Premiers modèles de dynamiques d'opinions</b>	<b>4</b>
1.1 Les modèles déterministes matriciels	4
1.1.1 Le modèle de DeGroot	4
1.1.2 Le modèle de Friedkin	5
1.2 Le modèle d'Axelrod	6
1.2.1 <i>Social Influence Model</i>	6
1.2.2 Simulations	7
1.2.3 Conclusion	8
<b>2 Voter Model</b>	<b>9</b>
2.1 Présentation du modèle	9
2.2 Marches aléatoires fusionnantes	9
2.3 <i>Stubborn agent</i>	10
2.4 Convergence en loi	10
2.5 Opinion moyenne asymptotique	11
2.6 Conclusion	13
<b>3 Modèle de Deffuant</b>	<b>14</b>
3.1 Présentation du modèle	14
3.1.1 A propos du nom du modèle	14
3.1.2 Modèle de Deffuant continu	14
3.1.3 Modèle de Deffuant discret	15
3.2 Cas du graphe complet	15
3.2.1 Simulations	15
3.2.2 Influence du paramètre $\tau$ et comportement des pics	16
3.2.3 Influence du paramètre $\mu$	19
3.3 Cas du graphe grille	19
3.3.1 Première observation	19
3.3.2 Processus de formation du pic central	21
3.3.3 Opinion finale vs Opinion initiale	22
3.4 Cas du graphe <i>Scale Free</i>	23
3.4.1 Première observation	24
3.4.2 Processus de formation des pics	25
3.4.3 Opinion initiale vs Opinion finale	25
3.4.4 Influence de la densité sur la dynamique d'opinion	26
3.4.5 Degrés des agents	26
3.5 Graphe connexe	27
3.5.1 Minoration de la probabilité de consensus	28
3.5.2 Preuve du théorème	28
3.5.3 Tentative de généralisation	30
3.6 Graphe non complet : pic de variance	32
3.7 Conclusion	33

# Introduction

L'invention relativement récente et la généralisation de l'usage des réseaux sociaux tel que Facebook, Twitter ou Instagram ont favorisé l'apparition d'un débat médiatico-politique à propos de l'impact réel ou supposé de ces réseaux sur les comportements humains. Ainsi les entreprises derrière ces réseaux sont régulièrement accusées de favoriser le complotisme, la montée des extrêmes, le sectarisme religieux, etc. Pourtant l'Homme n'a pas attendu internet pour s'organiser et communiquer en réseau. De fait la société la plus primitive peut déjà être vue comme un réseau social. Les réseaux de communication existaient même bien avant les hommes : de l'alignement des spins au sein d'un réseau cristallin à la génétique des espèces en passant par les épidémies, tous ces phénomènes peuvent être représentés et étudiés sous la forme pratique d'une dynamique d'opinion au sein d'un réseau <sup>1</sup>.

A la croisée de la physique, de la biologie, de la sociologie, de l'informatique et des mathématiques, l'étude de ces dynamiques fait preuve un peu plus chaque jour de son extrême généralité. Historiquement ce sont les physiciens et les biologistes qui se sont intéressés, chacun de leur côté, à ce sujet. La recherche mathématique dans ce domaine est récente et bien qu'elle tende à se placer dans un cadre plus général et plus rigoureux, elle n'hésite pas à profiter des apports des autres disciplines dans le domaine.

La compréhension fine de ces dynamiques d'opinions n'est pas qu'un simple enjeu scientifique ou un sujet d'actualité. C'est aussi, entre autre, un enjeu sanitaire, car elle permettrait de modéliser la progression d'un virus (utile en cas de pandémie). Au niveau du secteur privé, une meilleure compréhension des dynamiques pourrait également permettre d'améliorer l'impact des campagnes publicitaires. En effet, après la compréhension de ces dynamiques vient leur manipulation, ce qui dote cette étude d'un enjeu politique comme cela a pu être constaté avec le scandale de *Cambridge Analytica* lors des élections présidentielles aux Etats-Unis en 2016.

Dans ce rapport nous nous intéresserons à quelques uns des modèles de dynamique les plus connus et les plus étudiés. On commence par décrire quelques modèles historiques (1) avant d'approfondir l'étude numérique et analytique du *Voter Model* (2) et du *modèle de Deffuant* (3).

---

1. Ici le terme d'opinion est entendu dans un sens très large ainsi la séropositivité à un virus, la couleur de la peau ou le spin d'un atome sont considérés comme des opinions au même titre que l'orientation politique



# Chapitre 1

## Premiers modèles de dynamiques d'opinions

Le premier modèle de dynamique d'opinions pris dans le sens large est probablement le **modèle d'Ising** introduit en 1925 pour étudier les alignements de moments magnétiques dans un matériau ferromagnétique. Ce modèle, issu de la physique, sera par la suite utilisé pour modéliser les dynamiques d'opinions au sein d'une population. Nous nous intéressons ici à trois modèles qui ont une importance historique dans le développement mathématique de l'étude des dynamiques d'opinions. Une liste plus exhaustive des modèles utilisés en maths peut être trouvée au début de ce mémoire de T. HIRSCHER [1].

### 1.1 Les modèles déterministes matriciels

Les premiers travaux sur les dynamiques d'opinions au sein d'un groupe d'individus se sont basés sur le calcul matriciel. Ces modèles posent les bases de la discipline en démontrant la pertinence des outils mathématiques pour traiter ce sujet. Certaines des questions soulevées par ces modèles, en particulier sur la représentation mathématique du concept d'opinion, restent encore ouvertes aujourd'hui.

#### 1.1.1 Le modèle de DeGroot

Dans ce premier modèle publié par M.DEGROOT en 1974 [2] on étudie un groupe de  $N$  individus qui doivent atteindre un consensus. Leur opinion est modélisée par une distribution de probabilité pour la valeur d'un paramètre inconnu  $\theta$  à valeur dans un ensemble abstrait. Dans les faits le même modèle fonctionne en prenant n'importe quel ensemble convexe comme espace d'opinion.

Au départ chaque individu  $i$  est convaincu que la distribution de  $\theta$  est  $F_{i,0}$  puis il va faire évoluer cette opinion en fonction des distributions proposées par les autres individus. Les changements d'opinion se font suivant la technique de l'*opinion pooling* c'est à dire que l'opinion à l'instant  $n + 1$  est une combinaison convexe des opinions à l'instant  $n$ . Autrement dit à chaque pas de temps l'opinion de l'individu  $i$  devient :

$$F_{i,n} = \sum_j p_{ij} F_{j,n-1}$$

où les  $p_{ij}$  correspondent au poids que donne l'individu  $i$  à l'opinion de l'individu  $j$ . Ici on fait l'hypothèse (forte) que les poids sont décidés une bonne fois pour toutes et ne sont pas modifiés par la suite.

On peut alors noter  $P = (p_{ij})_{ij}$  la matrice des poids et  $F^{(n)} = (F_{i,n})_i$  le vecteur des opinions à l'instant  $n$ . On remarque alors facilement que

$$F^{(n+1)} = P F^{(n)} = P^n F^{(0)}.$$

De plus comme les poids somme à 1 la matrice  $P$  est stochastique. On reconnaît alors une chaîne de Markov homogène à  $N$  états de matrice de transition  $P$ . On peut alors utiliser les théorèmes de convergence des chaînes de Markov pour conclure que :

**Théorème 1.1.1** (théorèmes 1,2 et 3 dans [2]). *Un consensus est atteint dans le modèle de DeGroot si la chaîne de Markov sous jacente possède une probabilité invariante  $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_N)$ . Dans ce cas l'opinion qui fera consensus sera  $\sum_i \pi_i F_{i,0}$ .*

Démonstration. voir [2] ■

On s'attend alors à observer plusieurs types de comportements : si une puissance de la matrice  $P$  dispose d'une colonne dont les coordonnées sont toutes non nulles alors le consensus est atteint. En revanche si la matrice  $P$  est diagonale par bloc et que les blocs ne communiquent pas entre eux, un consensus pourra être atteint dans chacun des blocs mais il n'y aura pas de consensus global.

Dans le cas où  $\theta$  est un réel on peut facilement représenter graphiquement la dynamique d'opinion. Chaque opinion représentée par la courbe d'une distribution de probabilité et la simulation consiste en des multiplications de matrices. On observe alors comme prévu une dynamique qui dépend de la forme de la matrice de transition.

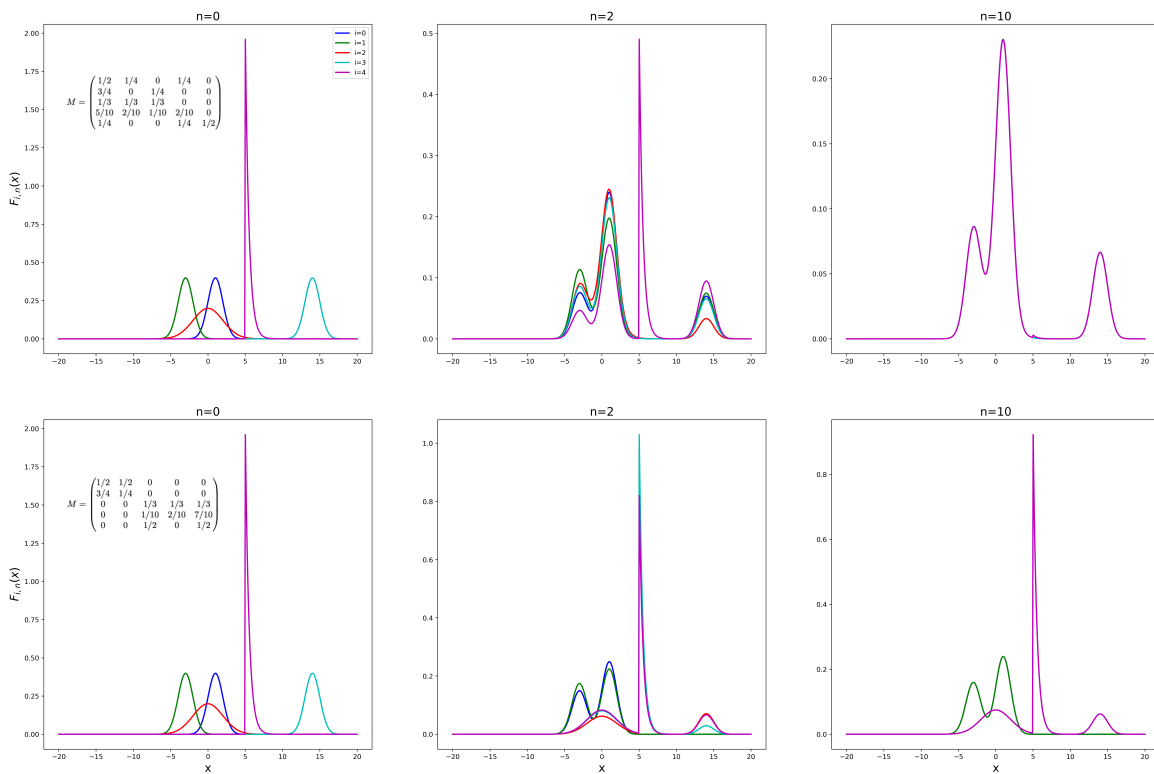


FIGURE 1.1 – Représentation graphique du modèle de Degroot entre 5 individus (4 d'opinions gaussiennes et 1 d'opinion exponentielle). Sur la première ligne tous les états de la matrice communiquent et un consensus est atteint . Sur la seconde, la matrice présente deux blocs et on observe deux opinions limites différentes. Cette illustration et les suivantes (sauf mention contraire) ont été réalisées par l'auteur, le code est disponible sur <https://github.com/ValentinKil/DynamiquesOpinions2021>

### 1.1.2 Le modèle de Friedkin

En 1990 [3], N.FRIEDKIN et E. JOHNSEN proposent un modèle qui généralise dans une certaine mesure le modèle de DeGroot. Ce faisant ils réunissent sous une même théorie plusieurs modèles préexistants. Leur objectif est de modéliser la manière dont se forme une opinion dans une situation complexe où  $N$  acteurs s'influencent mutuellement tout en subissant l'influence de  $k$  facteur externe. Encore une fois les opinions sont considérées comme étant des éléments d'un ensemble convexe. Le modèle peut s'écrire :

$$Y_t = W_t Y_{t-1} + X_t B_t + U_t$$

où

- ▶  $Y_t$  est le vecteur contenant les opinions des  $N$  individus à l'instant  $t$
- ▶  $W_t$  est la matrice explicitant l'influence mutuelle des acteurs
- ▶  $B_t$  est le vecteur contenant les  $k$  facteurs externes dont on souhaite étudier l'influence
- ▶  $X_t$  est la matrice explicitant l'influence des facteurs externes
- ▶  $U_t$  correspond aux facteurs résiduels dont on n'explique pas l'influence sur chaque individu.

Une telle modélisation est facilement interprétable : le premier terme de la somme correspond à l'influence mutuelle entre les différents individus autrement dit l'influence des facteurs internes au groupe. Les deux autres termes correspondent à l'action des facteurs externes.

Le paradigme présenté ici est très général afin d'englober la plupart des modèles classiques existants (Modèle *Peer Effects*, Modèle de DeGroot ...). Une simplification classique revient à supposer que toutes les variables sauf  $Y_t$  sont indépendantes du temps. Dans ce cas on peut calculer le vecteur opinion limite grâce à l'algèbre linéaire mais on perd en généralité.

Alors que le modèle de DeGroot était pure abstraction, FRIEDKIN et JOHNSEN ambitionnent de représenter avec leur modèle une certaine réalité sociologique, aussi ils ne manquent pas d'énoncer les hypothèses simplificatrices qu'ils ont dues réaliser afin de mettre en place son modèle :

1. Déterminisme : l'opinion d'un individu est déterminé par un ensemble de variables causales, ainsi le terme  $X_t B_t + U_t$  est vu comme capturant l'ensemble des conditions externes qui agissent sur l'opinion des individus. En particulier l'opinion d'un individu n'a rien d'aléatoire.
2. Décomposabilité : le processus de constitution de l'opinion peut se décomposer en des périodes au cours desquelles des équations linéaires donnent une prédiction pertinente de ce qui se passe
3. Continuation : Le processus de formation de l'opinion ne cesse jamais.

Parmi ces trois hypothèses la première est très certainement la plus discutable aussi bien sur le plan philosophique que pratique. En effet, parmi les phénomènes que l'on cherche à modéliser très peu sont purement déterministes. Ainsi le hasard semble intervenir aussi bien dans la transmission d'un gène que lors de la contamination par un virus ou même que dans l'expression d'une opinion politique. C'est pourquoi les modèles présentés dans la suite de ce rapport ont tenté à leur manière de s'affranchir de cette hypothèse de déterminisme.

## 1.2 Le modèle d'Axelrod

Parmi l'ensemble des modèles stochastiques de dynamique d'opinion, le plus simple et le plus utilisé est le *Voter Model* auquel nous consacrerons une section entière dans quelques lignes. Il existe de nombreux autres modèles stochastiques reposant sur des hypothèses plus au moins variées. Parmi eux le modèle présenté par AXELROD en 1997 [4] est particulièrement intéressant, il aura d'ailleurs une grande influence dans le domaine. Outre l'aspect stochastique AXELROD introduit une notion de "culture" qui correspond à un vecteur d'opinions, l'idée sous jacente étant que les dynamiques d'opinions ne sont pas indépendantes, ainsi l'opinion à propos d'Emmanuel Macron n'est pas forcément décorélée de l'opinion à propos de Marine le Pen ou encore la probabilité qu'un gène soit transmis à la descendance n'est pas indépendante de la probabilité que le gène voisin soit également transmis. Le modèle d'Axelrod repose sur deux prémisses de base :

- ▶ Les gens sont plus enclins à interagir avec ceux qui partagent de nombreux aspects de leur propre culture (ne serait-ce qu'au niveau de la langue)
- ▶ L'interaction entre deux individus tend à conduire à un accroissement des aspects culturels communs

A partir de ces deux prémisses AXELROD va construire le *Social Influence Models*. Ce modèle pourtant très simple qui va nous amener à des réflexions évoluées.

### 1.2.1 *Social Influence Model*

Le **Social Influence Model** considère que chaque agent est situé aux noeuds d'une grille à mailles carrées de taille finie. Chacun d'eux possède une culture représentée par une liste de caractéristiques (un vecteur contenant des entiers), pour chaque caractéristique il y a un ensemble fini de valeur autorisée. La dynamique d'influence est définie ainsi :

1. Un agent est choisi au hasard, il devient *actif*, puis un de ses voisins dans le graphe est également choisi aléatoirement.

2. Avec une probabilité égale à la proportion de similarité entre les cultures des deux agents sélectionnés ils interagissent comme suit : une caractéristique est choisie au hasard parmi celles où les deux voisins différent (s'il y en a une), et l'agent actif adopte la valeur de son voisin.

## 1.2.2 Simulations

AXELROD se contente d'étudier son modèle de manière expérimentale en effectuant de nombreuses simulations. Ces dernières montrent l'apparition de plusieurs *régions culturelles* distinctes au sein desquelles les agents ont exactement la même opinion, les régions sont stables à partir du moment où elles n'ont plus de trait commun avec les régions voisines.

Le modèle d'Axelrod dispose de trois paramètres principaux : le nombre de caractéristiques de la culture, la taille de la plage des valeurs autorisées pour chaque caractéristique et la taille de la grille. Pour simplifier on suppose que la taille de la plage des valeurs autorisées est identique pour toutes les caractéristiques. On souhaite étudier l'influence de ces différents paramètres sur le nombre de régions culturelles stables.

Les premières simulation d'AXELROD permettent de faire un certain nombre de constatations simples et intuitives :

- ▶ Sans surprise plus on augmente la dimension de la culture ( le nombre de caractéristiques possibles) plus le nombre moyen de régions stables à tendance à être petit, les agents ayant de plus grandes chances d'interagir.
- ▶ De même plus le nombre de valeurs possibles pour une caractéristique est grand plus le nombre de régions stables est élevé puisque cela diminue la probabilité que deux individus interagissent.
- ▶ De plus si on augmente le nombre de voisins (en autorisant les communications diagonales par exemple) le nombre de régions stables diminue.

L'étude du nombre de régions stables en fonction de la taille du territoire est le point le plus intéressant. Les simulations montrent que le nombre de régions stables est petit dans les petits territoires et a tendance à augmenter avec la taille du territoire jusqu'à une certaine valeur critique à partir de cette valeur le nombre de régions ne fait que diminuer. Ainsi si les petits et grands territoires présentent à la limite un faible nombre de régions stables, les territoires de taille modérée ont beaucoup de régions stables.

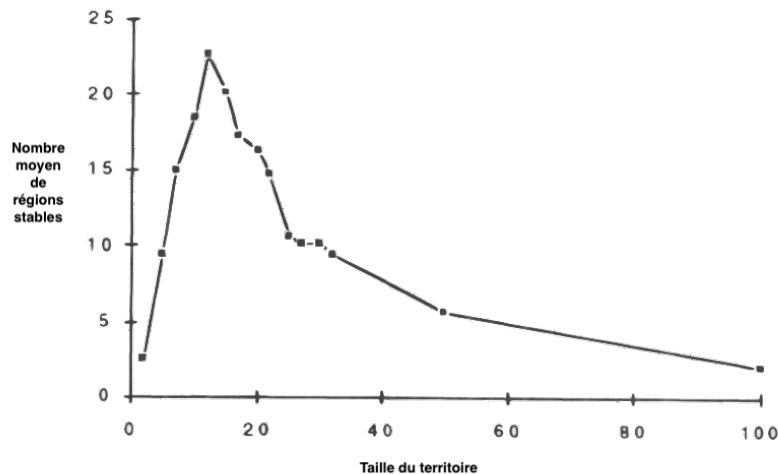


FIGURE 1.2 – Nombre moyen de régions stables en fonction de la taille du territoire, simulation réalisée avec des cultures ayant 5 caractéristiques s'étendant chacune sur une plage de taille 15. Les points sont réalisés en moyennant sur 40 simulations (seulement 10 pour les territoires de tailles 100 et 50). Image issu de [4]

L'explication de ce phénomène contre-intuitif nécessite l'étude de la dynamique de formation des régions culturelles stables.

Tout d'abord on remarque que si deux régions culturelles ont des cultures très proches celle de la population dominante aura tendance à phagocytter l'autre. Cela s'explique par la plus grande persistance des grandes

régions qui ont donc plus de chance de l'emporter.

Un idée intéressante est alors de regarder les *zones culturelles* qui sont des zones géographiques constituées d'agents ayant des cultures compatibles c'est à dire qui ont au moins une caractéristique commune. Ainsi dès le départ s'il y a beaucoup de régions culturelles différentes (quasiment une par agent) il y a d'ores et déjà seulement quelques zones culturelles. Ainsi la plus grande partie de la dynamique consiste en l'affrontement de régions culturelles pour la domination d'une zone culturelle. Avec le temps, les frontières entre les régions d'une même zone ont tendance à disparaître tandis que celle entre zone culturelle ont tendance à rester stable.

Tant qu'il y a plusieurs régions au sein de chaque zone il y a plusieurs traits différents pour une même caractéristique dans la zone et ces différents traits ont une chance de dissoudre une frontière (régionale ou zonale). Le résultat étant que plus un territoire est lent pour atteindre la stabilité plus il est probable que les frontières régionales et zonales soient dissoutes. Ainsi, puisque les grands territoires sont lents à atteindre l'équilibre, les frontières ont plus de chance de se dissoudre et donc en moyenne le nombre de régions stables à l'équilibre est plus petit.

Pour conclure : dans les petits territoires il n'y a pas la place pour beaucoup de régions stables, dans les territoires de taille modérée il y a la place et dans les très grands territoires il y a encore plus de place mais l'équilibre est si long à atteindre que la dynamique d'opinion a le temps de dissoudre les frontières et de réduire le nombre de régions stables.

### 1.2.3 Conclusion

On remarque tout d'abord que même un modèle très simple comme le *Social Influence Model* peut conduire à des résultats contre-intuitifs. Outre le comportement du nombre de régions stables en fonction de la taille du territoire nous avons observé d'autres phénomènes à première vue étonnants. Ainsi même s'il n'y a pas d'avantage à adopter la position majoritaire, les positions minoritaires ont quand même tendance à disparaître. On observe également un phénomène de polarisation des cultures alors même que le seul processus autorisé est un processus de convergence : ainsi les polarisations ne sont pas nécessairement dues à des processus de divergence.

On peut donc en conclure qu'un comportement individuel simple (voir simpliste) peut donner lieux à des dynamiques globales complexes. Ce phénomène n'est pas l'apanage des cohortes d'agents abstraits, c'est un phénomène constaté depuis longtemps chez les atomes et c'est d'ailleurs ce qui permet à la thermodynamique d'exister, depuis quelques années ce phénomène est également observé chez les animaux comme on peut le lire dans cette ouvrage de vulgarisation [5].

# Chapitre 2

## Voter Model

Le *Voter Model* est l'un des tous premiers modèles stochastiques de dynamiques d'opinions, il a été introduit indépendamment par plusieurs chercheurs au milieu des années 1970 et est utilisé aussi bien en génétique qu'en épidémiologie ou qu'en socio-physique. On présente ici une version du modèle légèrement plus générale que la version classique, issus de l'article de E.YILDIZ [6].

### 2.1 Présentation du modèle

On considère un ensemble d'agent  $\mathcal{V} = \{1, \dots, N\}$  où  $N \in \mathbb{N}$  relié au sein d'un réseau social représenté par un graphe non orienté connexe  $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E})$  où  $\mathcal{E}$  est un ensemble d'arêtes. On note  $\mathcal{N}_i = \{j | (i, j) \in \mathcal{E}\}$  l'ensemble des voisins de  $i$ , ce sont les agents susceptibles d'influencer l'opinion de l'agent  $i$ .

On note  $S$  l'ensemble de opinions possibles,  $x_i(t)$  l'opinion de l'agent  $i$  à l'instant  $t$  et enfin  $x(t) = [x_i(t)]_{1 \leq i \leq N}$  le vecteur contenant l'opinion de tous les agents à l'instant  $t$ . On suppose que chaque agent commence dans une valeur initiale  $x_i(0)$ .

La dynamique d'opinion est alors la suivante : chaque agent est équipé d'une horloge exponentielle indépendante de celle des autres agents<sup>1</sup>, à chaque fois que l'horloge sonne l'agent réévalue son opinion en choisissant uniformément au hasard un de ses voisins dans le graphe et en adoptant son opinion.

On peut montrer que cette dynamique peut être simplifiée en indexant par un temps fini et en considérant une fonction d'indexation  $I : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{V}$  qui à chaque instant désigne l'agent qui va réévaluer son opinion. On obtient ainsi une dynamique discrète équivalente à la dynamique présentée initialement mais qui ne nécessite pas de faire appel à la notion de processus de Poisson. Dans la suite de cette section on reproduit une partie de l'article de E.YILDIZ [6] en apportant les modifications nécessaires pour considérer une indexation par un temps discret.

Le modèle tel que présenté ci-dessus convient pour une étude par simulation telle que celle effectuée par AXELROD avec son modèle 1.2. Certains résultats analytiques peuvent aussi être déduits de ce modèle, principalement en remarquant que  $x(n), n \in \mathbb{N}$  est une chaîne de Markov. Par exemple on peut démontrer qu'un consensus sera toujours atteint au sein du groupe d'agent dans le cas où le graphe  $\mathcal{G}$  est connexe. Pour obtenir des résultats analytiques plus élaborés il est nettement plus pratique de passer par une représentation duale du *Voter Model* : les marches aléatoires fusionnantes.

### 2.2 Marches aléatoires fusionnantes

Etant donné un agent  $i \in \mathcal{V}$  et un instant  $T \in \mathbb{N}$  on définit la marche aléatoire  $\{Y_{i,T}(T-s) : s \in \llbracket 0, T \rrbracket\}$  sur le graphe  $G$  tel que :

$$Y_{i,T}(T-s) = j$$

si et seulement si il existe une suite d'agents (ie de noeuds du graph)  $(u_l)_{l \in \llbracket 0, n \rrbracket}$  avec  $u_0 = i$  et  $u_n = j$  et une suite croissante d'instant  $(r_l)_{l \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket} \in \llbracket 0, s \rrbracket$  avec  $r_0 = 0$  et  $r_{n+1} = s$  tel que

---

1. c'est à dire une horloge qui attend un temps aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre 1 entre chaque sonnerie.

1. l'agent  $u_{l-1} \in \mathcal{V}$  a adopté l'opinion de l'agent  $u_l$  à l'instant  $T - r_l$  pour tout  $l \in \llbracket 0, n \rrbracket$
2. l'agent  $u_{l-1} \in \mathcal{V}$  n'as pas réévalué son opinion dans l'intervalle de temps  $\llbracket T - r_l, T - r_{l-1} \rrbracket$  pour tout  $l \in \llbracket 0, n \rrbracket$
3. l'agent  $u_n \in \mathcal{V}$  n'as pas réévalué son opinion dans l'intervalle de temps  $\llbracket T - r_n, T - r_{n+1} \rrbracket$

On peut alors montrer par récurrence que :

$$\forall s \in \llbracket 0, T \rrbracket, x_i(T) = x_{Y_{i,T}(T-s)}(s).$$

en d'autres termes l'opinion de l'agent  $i$  au temps  $T$  est le même que l'opinion de l'agent  $Y_{i,T}(T - s)$  au temps  $s$ . Ainsi la marche aléatoire  $Y_{i,T}(T - s)$  retrace la source de l'opinion de l'agent  $i$  à l'instant  $T$ .

Si l'on souhaite retracer l'origine de l'opinion d'un groupe  $\mathcal{B} \subset \mathcal{V}$  constitué de plusieurs agents on peut définir la marche aléatoire jointe

$$Y_{\mathcal{B},T} = \{Y_{i,T}(T - s) | i \in \mathcal{B}\}$$

tel que :

- Pour tout  $i, j \in \mathcal{B}$  les marches aléatoires  $Y_{i,T}(T - s)$  et  $Y_{j,T}(T - s)$  sont indépendantes tant qu'elles se croisent pas.
- Si deux marches aléatoires se rencontrent à un instant  $r \in \llbracket 0, T \rrbracket$  alors elles fusionnent et évoluent ensemble i.e. :  $\forall s \in \llbracket 0, r \rrbracket, Y_{i,T}(T - s) = Y_{j,T}(T - s)$ .

Le point crucial est que si au moins deux marches aléatoires se retrouvent au même endroit au même moment alors elles fusionnent et commencent à évoluer ensemble puisque l'origine de l'opinion à cet instant de l'agent situé au point de rencontre sera le même pour les deux marches. Ainsi  $Y_{\mathcal{B},T}$  définit des marches aléatoires fusionnantes sur le graphe  $\mathcal{G}$  qui constituent le **processus dual du voter model**.

## 2.3 Stubborn agent

Un complication classique du *voter model* est l'ajout d'agents d'opinions fixes, traditionnellement désignés comme *stubborn agents*<sup>2</sup>. Les *stubborn agents* permettent de modéliser des acteurs qui peuvent avoir une grande influence au sein du réseau social sans pour autant être influencé par les autres agents, on peut parfaitement les imaginer comme étant des acteurs institutionnels, des militants politiques ou des groupes de lobbying.

La compréhension du comportement de la dynamique d'opinion face à ces *stubborn agents* est importante car il pourrait en découler des stratégies de manipulation d'opinion à base de "placement optimal de *stubborn agents*" comme on peut le lire dans [6].

On peut adapter la représentation duale des marches aléatoires fusionnantes à cette nouvelle situation en statuant que les *stubborn agents* sont des états absorbants de la marche aléatoire. C'est à dire que si une marche aléatoire atteint un *stubborn agent* alors elle reste sur ce noeud du graphe indéfiniment.

Dans la suite de cette partie on considère l'espace d'opinion  $S = \{0, 1\}$ , et on suppose donc qu'il existe deux ensembles non vides  $\mathcal{V}_0, \mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}$ , les agents de  $\mathcal{V}_0$  sont les *stubborn agents* d'opinion fixe 0, ceux de  $\mathcal{V}_1$  sont les *stubborn agents* d'opinion fixe 1. Les agents "normaux" de  $\mathcal{V} \setminus \{\mathcal{V}_0 \cup \mathcal{V}_1\}$  suivent la dynamique d'opinion décrite plus haut.

On fait l'hypothèse que chaque agent de  $\mathcal{V} \setminus \{\mathcal{V}_0 \cup \mathcal{V}_1\}$  est relié à au moins un *stubborn agent*.

## 2.4 Convergence en loi

Bien sûr à partir du moment où il y a des *stubborn agents* d'opinions différentes, il ne peut pas y avoir de consensus au sein du graphe. En revanche on va démontrer que le vecteur des opinions  $x(t)$  converge en loi vers une unique distribution.

**Théorème 2.4.1** (théorème 2.1 dans [6]). *Avec les notations et les hypothèses précédentes, le vecteur des opinions  $x(t)$  converge en loi vers une unique distribution dite stationnaire que l'on note  $x^*$ .*

---

2. agents butés

*Démonstration.* Il est à noter que ce résultat peut être obtenu sans faire appel à la représentation duale sous forme de marche aléatoire, la preuve suivante est adaptée de [6]. Remarquons que le vecteur des opinions  $x(t)$ ,  $t \in \mathbb{N}$  est en fait une chaîne de Markov homogène dont l'ensemble d'état est  $S^N$ , en effet les agents ne réévaluent leur opinion qu'un par un et l'opinion de l'agent à un instant  $n$  ne dépend que des opinions de l'ensemble des agents à l'instant  $n-1$ . On souhaite donc montrer que cette chaîne de Markov ne possède qu'une seule classe de récurrence.

Notons  $P$  sa matrice de transition. Sans perdre en généralité on peut supposer que la chaîne possède une quantité non nulle d'états transitoires. Par suite, quitte à réordonner l'espace d'état on peut écrire  $P$  sous la forme d'une matrice par bloc :

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ R & U \end{pmatrix}$$

où  $U^k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$ . La matrice  $U$  représente les probabilités de transition entre les états transitoires. L'ensemble des états correspondants à  $P_1$  correspond à l'ensemble des états récurrents, on note  $M_1$  l'ensemble de ces états. On cherche à montrer que les états de  $M_1$  forment une seule classe de récurrence, autrement dit pour tout  $x, y \in M_1$ ,  $x \leftrightarrow y$ .

Soit  $x, y \in M_1$ , rappelons que  $x$  et  $y$  sont des  $N$ -uplets représentant l'opinion de tous les agents. Introduisons l'ensemble  $\mathcal{D}$  des indices en lesquels  $x$  et  $y$  diffèrent :

$$\mathcal{D} = \{i \in \llbracket 1, N \rrbracket : x_i \neq y_i\}.$$

Remarquons tout d'abord que pour chaque agent  $i \in \mathcal{D}$  il existe dans le graphe  $\mathcal{G}$  un chemin allant de l'agent  $i$  à au moins un agent de  $\mathcal{V}_0$  qui ne passe pas par  $\mathcal{V}_1$  et un chemin allant de l'agent  $i$  à au moins un agent de  $\mathcal{V}_1$  qui ne passe pas par  $\mathcal{V}_0$ . En effet si ce n'était pas le cas alors dans la composante connexe de  $\mathcal{G}$  contenant l'agent  $i$  il n'y aurait des *stubborn agents* que d'un seul type (il y a forcément au moins un *stubborn agent* dans la composante par hypothèse), mais alors à la limite l'ensemble des agents de cette composante auront adopté l'opinion de ces *stubborn agents* et donc au moins un des deux parmi les états  $x$  et  $y$  serait transitoire.

Soit  $i \in \mathcal{D}$ , et un chemin allant de  $\mathcal{V}_1$  à l'agent  $i$  sans passer par  $\mathcal{V}_0$ . On peut considérer la suite d'événements suivante : le premier agent qui n'est pas d'opinion fixe sur le chemin choisit un de ses voisins dans  $\mathcal{V}_1$  et adopte son opinion ; le deuxième agent qui n'est pas d'opinion fixe choisit le premier agent qui n'est pas d'opinion fixe et adopte son opinion, et ainsi de suite. Cette suite d'événements a une probabilité strictement non nulle d'advenir. De plus cette succession d'événements transformerait  $x$  et  $y$  en de nouveaux états, respectivement  $x'$  et  $y'$  avec  $\mathcal{D}' = \{i \in \llbracket 1, N \rrbracket : x'_i \neq y'_i\}$  qui serait un sous ensemble strict de  $\mathcal{D}$ . En répétant ce même argument séquentiellement pour chaque agent  $i \in \mathcal{D}$  les états  $x$  et  $y$  deviendraient  $x^*$  et  $y^*$  avec  $x^* = y^*$ .

Puisque l'état  $y$  est récurrent et que  $y \rightarrow y^*$  alors  $y^*$  est récurrent également et donc  $y \leftrightarrow y^*$  et de même  $x \leftrightarrow x^*$ . Finalement puisque  $x^* = y^*$  alors  $x \leftrightarrow y$ . Ainsi on vient de démontrer que la chaîne de Markov ne possède qu'une seule classe de récurrence.

Ainsi on peut conclure que la chaîne de Markov possède une unique distribution stationnaire. ■

## 2.5 Opinion moyenne asymptotique

Dans la grande majorité des cas nous sommes intéressés par la compréhension de l'opinion globale sans nous soucier des opinions individuelles, c'est par exemple le cas lors d'une élection présidentielle. Dans cette partie nous allons nous intéresser à l'*opinion moyenne* dans la société, c'est à dire à la quantité :

$$\bar{x}(t) = \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathcal{V}} x_i(t).$$

On dispose du corollaire immédiat au théorème 2.4.1 :

**Corollaire 2.5.1** (corollaire 3.1 dans [6]). *L'opinion moyenne au sein du groupe converge en loi vers une variable aléatoire réelle que l'on note  $\bar{x}^*$  que l'on prénomme opinion asymptotique moyenne.*



On cherche à exprimer le premier moment de l'opinion moyenne asymptotique.  
Commençons par définir la marche aléatoire  $Z(t)$ ,  $t \in \mathbb{N}$  avec la probabilité de transition :

$$\mathbb{P}(i \rightarrow j) = \begin{cases} \frac{1}{\#\mathcal{N}_i} & \text{si } i \notin \mathcal{V}_0 \cup \mathcal{V}_1 \text{ et } j \in \mathcal{N}_i \\ 1 & \text{si } i \in \mathcal{V}_0 \cup \mathcal{V}_1 \text{ et } j = i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Autrement dit la marche choisit uniformément un des voisins pour son prochain pas et les *stubborn agents* sont des états absorbants. Pour  $i \in \mathcal{V}$  on définit  $p_i$  comme étant la probabilité que la marche aléatoire  $Z(t)$  initialisée en  $i$  soit absorbée par l'ensemble  $\mathcal{V}_1$  i.e. :

$$p_i = \mathbb{P} \left( \lim_{t \rightarrow +\infty} Z(t) \in \mathcal{V}_1 \mid Z(0) = i \right).$$

On dispose alors du résultat suivant pour caractériser l'espérance de l'opinion asymptotique d'un agent.

**Proposition 2.5.2** (proposition 3.2 dans [6]). *Soit  $i \in \mathcal{V}$  alors avec les notations précédentes*

$$\mathbb{E}(x_i^*) = p_i.$$

*Démonstration.* Soit  $i \in \mathcal{V}$ . Puisque  $x_i(t)$  ne peut prendre que les valeurs 0 ou 1 alors pour tout agent  $i$  :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(x_i(t)) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(x_i(t) = 1).$$

On va alors utiliser la notion duale de marche aléatoire fusionnante introduite précédemment. En prenant  $s = 0$  on obtient que

$$\forall t \in \mathbb{N}, x_i(t) = x_{Y(i,t)}(0).$$

Puisque  $Y(i, t)$  est une marche aléatoire sur le graphe  $\mathcal{G}$  il existe par hypothèse un chemin allant de chaque agent "normal" à un *stubborn agent* et il existe deux classes absorbantes non vides,  $\mathcal{V}_0$  et  $\mathcal{V}_1$ . Dans ces conditions on peut montrer que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} Y(i, t) \in \mathcal{V}_0 \cup \mathcal{V}_1$  avec probabilité 1. Par suite

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(x_i(t) = 1) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(x_{Y(i,t)}(0) = 1) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(Y(i, t) \in \mathcal{V}_1).$$

On a donc

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(x_i(t)) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(Y(i, t) \in \mathcal{V}_1).$$

Mais puisque  $x_i(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} x_i^*$  est que ce sont des variables aléatoires réelles alors pour tout  $i \in \mathcal{V}$  et toutes fonctions continues bornées  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  on a :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[f(x_i(t))] = \mathbb{E}[f(x_i^*)].$$

On peut alors construire la fonction  $f^*$  telle que

$$f^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \in [0, 1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

La fonction  $f^*$  est bien continue bornée sur  $\mathbb{R}$  on a donc :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[f^*(x_i(t))] = \mathbb{E}[f^*(x_i^*)].$$

Or  $x_i(t) \in \{0, 1\}$  donc  $f^*(x_i(t)) = x_i(t)$  par suite

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[x_i(t)] = \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[f^*(x_i(t))] = \mathbb{E}[f^*(x_i^*)] = \mathbb{E}(x_i^*).$$

On vient donc d'obtenir le résultat voulu :

$$\mathbb{E}(x_i^*) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[x_i(t)] = \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(Y(i, t) \in \mathcal{V}_1).$$

■

Un corollaire immédiat à cette proposition est :

**Corollaire 2.5.3** (corollaire 3.3 dans [6]). *L'espérance de l'opinion asymptotique moyenne est*

$$\mathbb{E}(\bar{x}^*) = \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathcal{V}} p_i.$$

L'espérance de l'opinion asymptotique d'un agent peut être vue comme une mesure du biais de cet individu en faveur de l'opinion 1. Par suite l'opinion asymptotique moyenne peut être vue comme une mesure du *bias de l'ensemble de la société* par rapport à l'opinion 1. Il est important de souligner que cette quantité dépend à la fois de la structure du graphe  $\mathcal{G}$  et de la position, du nombre et du type des *stubborn agents*. La variance de l'opinion asymptotique moyenne peut également être calculée en raisonnant avec la représentation duale des marches aléatoires fusionnantes [6] mais c'est beaucoup plus compliqué.

## 2.6 Conclusion

Le *Voter Model* est un modèle de dynamique d'opinion particulièrement simple mais qui peut cependant s'appliquer à de nombreuses situations. Une opinion binaire telle que considérée dans ce cas peut modéliser avec pertinence la contamination en épidémiologie mais aussi en première approximation un débat politique (droite ou gauche) ou en marketing la perception de la qualité d'un produit (bonne ou mauvaise). L'ajout de *stubborn agents* permet d'étudier l'impact réel d'influenceur sur le réseau.

On a montré comment l'usage d'outils probabilistes bien connus comme les chaînes de Markov ou les marches aléatoires rendent possible l'existence de résultats analytiques sur la distribution d'opinion asymptotique. La mesure du biais de la société est particulièrement intéressante puisqu'elle mesure en quelque sorte l'impact des influenceurs sur l'opinion globale. Ainsi A.VENDEVILLE et all parviennent à créer une méthode de prédiction pour les élections américaines et anglaises à l'aide du *voter model* avec *stubborn agent* [7].

L'étape d'après consiste à se demander comment manipuler l'opinion globale en plaçant judicieusement des *stubborn agents* dans un graphe donné. De premiers résultats prometteurs existent sur le sujet, ainsi E.YILDIZ étudie le placement optimale d'un ou plusieurs *stubborn agents* afin d'augmenter le biais de l'ensemble de la société en faveur de l'opinion 1 [6], A.VENDEVILLE et all quant à eux montrent comment la création de connexions aléatoires avec les *stubborn agents* peut être utilisé pour détruire les chambres d'écho au sein de graphe [8].

# Chapitre 3

## Modèle de Deffuant

### 3.1 Présentation du modèle

#### 3.1.1 A propos du nom du modèle

De manière classique tous les auteurs semblent s'accorder pour lire dans [9] la première description du modèle auquel nous allons désormais nous consacrer, ainsi il est d'usage de le nommer **modèle de Deffuant**. Cependant au cours de nos recherches nous avons constaté au moins une apparition de ce modèle antérieure à cet article dans le rapport de stage de D.NEAU [10]. Dans les faits l'article de G.DEFFUANT et all [9] n'est constitué que de la traduction parfois approximative de certains passages du rapport accompagnée d'illustrations issues de ce rapport. Nous continuerons malgré tout de nommer ce modèle par son nom d'usage pour plus de facilité.

#### 3.1.2 Modèle de Deffuant continu

Nous faisons ici une description du modèle de Deffuant qui n'est pas exactement identique à celle initialement faite par D.NEAU [10] mais qui est plus générale afin d'englober toutes les versions du modèle de Deffuant. Les notations adoptées sont pour la plupart celle de [11].

- Soit  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$  un graphe, les sommets de ce graphe seront les agents dont on souhaite étudier l'opinion et la structure du graphe correspond à la structure du réseau social entre ces agents.
- Soit l'ensemble des opinions  $\Delta \subset \mathbb{R}^n$  un sous ensemble borné convexe de  $\mathbb{R}^n$  muni de la norme euclidienne  $\|\cdot\|$ .

On indexe la dynamique d'opinion par un temps discret et pour tout  $t \in \mathbb{N}$  on note alors

$$\xi_t : \mathcal{V} \rightarrow \Delta$$

la fonction qui donne accès à l'opinion de chaque agent à l'instant  $t$ . Ainsi  $\xi_t(x)$  est l'opinion de l'agent  $x$  à l'instant  $t$ .

On suppose que chaque agent choisi aléatoirement dans  $\Delta$  son opinion initiale de manière indépendante et en suivant une même loi. On se donne  $X$  une variable aléatoire qui suit cette loi.

La dynamique d'opinion du modèle de Deffuant est fondée sur les mêmes prémisses que le modèle d'Axelrod cependant la manière dont ces prémisses sont modélisées est légèrement différente. On se donne un *palier de confiance*  $\tau > 0$ . A chaque pas de temps une arête du graphe  $\mathcal{G}$  est sélectionnée uniformément au hasard, si les agents à chacun des bouts de l'arête ont des opinions éloignées d'une distance inférieure à  $\tau$  alors ils vont réévaluer leurs opinions en se reprochant l'un de l'autre, sinon il ne se passe rien.

La manière dont les agents réévaluent leur opinion dépend alors d'un dernier paramètre : la *capacité d'adaptation*  $\mu \in ]0, \frac{1}{2}]$ . Admettons que l'arête  $(x, y) \in \mathcal{E}$  soit sélectionnée à l'instant  $t \in \mathbb{N}$  alors :

$$\begin{aligned}\xi_t(x) &= \xi_{t-1}(x) + \mu(\xi_{t-1}(y) - \xi_{t-1}(x)) \mathbf{1}_{\{\|\xi_{t-1}(x) - \xi_{t-1}(y)\| \leq \tau\}} \\ \xi_t(y) &= \xi_{t-1}(y) + \mu(\xi_{t-1}(x) - \xi_{t-1}(y)) \mathbf{1}_{\{\|\xi_{t-1}(x) - \xi_{t-1}(y)\| \leq \tau\}}.\end{aligned}$$

Ce modèle est étudié numériquement dans le cadre du graphe complet et du graphe grille avec  $\Delta = [0, 1]$  par D.NEAU [10] et G.DEFFUANT et all [9]. G.WEISBUCH et all effectuent une étude numérique de ce modèle dans

le cas d'une graphe *scale free* [12]. Il existe également des études d'une variante de ce modèle où deux valeurs de  $\mu$  sont autorisé dont une très petite afin de créer des agents dont l'avis change très peu, par exemple [13], cette approche n'est pas sans rappeler le principe des *stubborn agents* dans le *voter model* vu précédemment.

### 3.1.3 Modèle de Deffuant discret

D.NEAU [10] et G.DEFFUANT et all [9] introduisent également un variante du modèle présenté ci dessus que nous appellerons le modèle de Deffuant discret. L'idée générale reste la même : les agents ne communiquent et ne s'influencent que si leurs opinions ne sont pas éloignées au-delà d'un certain palier.

Dans cette variante du modèle l'ensemble des opinions  $\Delta$  est pris comme étant l'hypercube de dimension  $n$  et la distance entre deux opinions n'est plus la distance euclidienne mais la distance de Hamming. Comme précédemment on se donne un palier de confiance  $\tau > 0$  qu'il convient de choisir entier, et à chaque pas de temps une arête est sélectionnée au hasard. Si les opinions des agents ont des opinions éloignées de plus de  $\tau$  alors il ne se passe rien. Dans le cas contraire une discussion s'entame entre les deux agents, pour chaque entrée pour laquelle les deux agents sont en désaccord un agent est choisi uniformément au hasard et il convaincra l'autre de sa position avec probabilité  $\mu$  où  $\mu$  est un paramètre fixé une fois pour dans  $[0, 1]$ .

Le lecteur attentif aura reconnu un modèle très similaire au modèle d'Axelrod et en effet les deux modèles ne diffèrent que sur très peu de points.

D.NEAU [10] et G.DEFFUANT et all [9] étudient numériquement ce modèle dans le cas d'un graphe complet. Par la suite des résultats analytiques ont été découvert à propos de ce modèle, principalement dans le cas des graphes infinis  $\mathbb{Z}$  [14] et  $\mathbb{Z}^2$  [15] ces résultats font intervenir la notion de marche aléatoire annihilante qui viennent jouer un rôle dual semblable à celui des marches aléatoires fusionnantes dans le cas du *voter model*. Il est intéressant de noter que les marches aléatoires annihilantes sont aussi un outil utile pour l'étude du modèle d'Axelrod [16].

Dans la suite nous nous concentrerons uniquement sur le modèle de Deffuant continu qui propose une vraie originalité par rapport au modèle précédent étudié dans la mesure où il est le seul à autoriser un espace d'opinion continue. On commence notre étude du modèle de Deffuant continu en réalisant de nombreuses simulations dans trois cas : le graphe complet, le graphe grille carré, et le graphe *scale free*. On se place dans le cas simple ou  $\Delta = [0, 1]$  et où la distribution initiale est uniforme.

## 3.2 Cas du graphe complet

### 3.2.1 Simulations

Dans cette sous-partie on suit globalement l'étude réalisé par D.NEAU [10] tout en amenant nos propres simulations. Il semble d'abord naturel de regarder comment évolue l'opinion de l'ensemble des agents au fil du temps pour plusieurs valeurs de  $\tau$  et de  $\mu$ . Nous avons réalisé un grand nombre de simulation dont on peut voir un extrait ci-après. L'ensemble des codes utilisés pour réaliser ces simulations est disponible sur <https://github.com/ValentinKil/DynamiquesOpinions2021>.

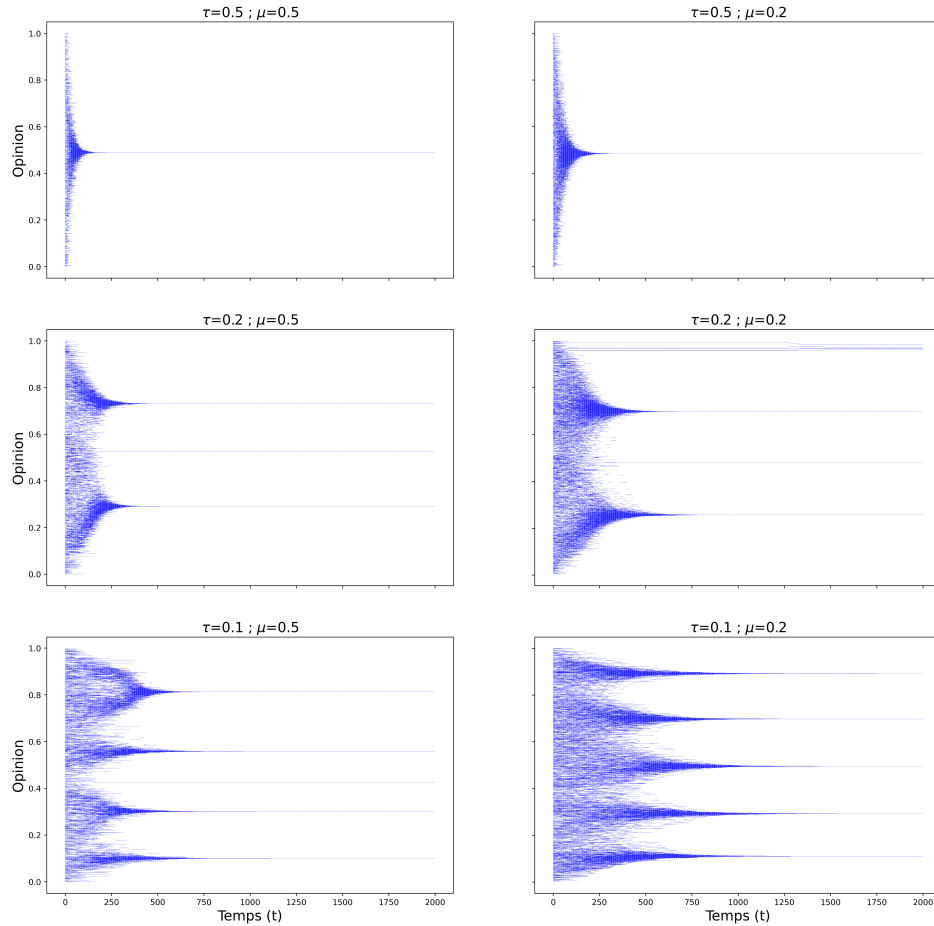


FIGURE 3.1 – Opinions en fonction du temps de chacun des agents dans un graphe complet constitué de  $N = 1000$  agents pour différentes valeurs des paramètres  $\tau$  et  $\mu$ .

### 3.2.2 Influence du paramètre $\tau$ et comportement des pics

Alors que les opinions sont initialement distribuées de manière uniforme on remarque que les opinions des agents vont converger vers un petit nombre d'opinions qui seront les seules survivantes au processus. On observe alors des pics d'opinions. Ainsi, bien que très simple, le modèle de Deffuant permet d'observer un phénomène bien connu : les chambres d'écho, des groupes d'agents qui ne communiquent plus qu'entre eux et au sein desquels il n'y a qu'une seule opinion.

L'ensemble des simulations effectuées montrent l'influence primordiale du paramètre  $\tau$  tandis que les paramètres  $\mu$  et  $N$  ne semblent influencer que sur la vitesse de convergence et la stabilité des valeurs asymptotiques. La valeur de  $\tau$  semble déterminer le nombre de pics :

- Pour  $\tau \geq 0.5$  on constate que toutes les opinions convergent vers une unique opinion proche de 0.5. Ce n'est guère étonnant car dans ce cas chaque agent peut communiquer avec l'ensemble de la population via au plus un intermédiaire.
- Pour  $\tau < 0.5$  on observe des pics plus nombreux, d'autant plus nombreux que  $\tau$  est petit.

On observe ainsi que le nombre maximal de pics  $p_{max}$  décroît avec  $\tau$ . Ce phénomène est expliqué par D.NEAU [10] en raisonnant sur la place que prend un pic. En effet deux pics ne peuvent pas coexister s'ils sont à une distance inférieure à  $\tau$  auquel cas ils finiraient par fusionner. De cette observation on peut déduire qu'un pic prend une place d'environ  $2\tau$  dans l'intervalle  $[0, 1]$ . Ainsi il y aurait au maximum  $\lfloor \frac{1}{2\tau} \rfloor$  pics, à cette partie entière il faut rajouter 1 ou 2 pour compter d'éventuelles pics latéraux qui pourraient se former une fois que l'intervalle  $[0, 1]$  a été découpé en intervalles de largeur  $2\tau$  :

$$p_{max}(\tau) = \left\lfloor \frac{1}{2\tau} \right\rfloor + \begin{cases} 2 & \text{si } \left\lfloor \frac{1}{2\tau} \right\rfloor \neq \frac{1}{2\tau} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

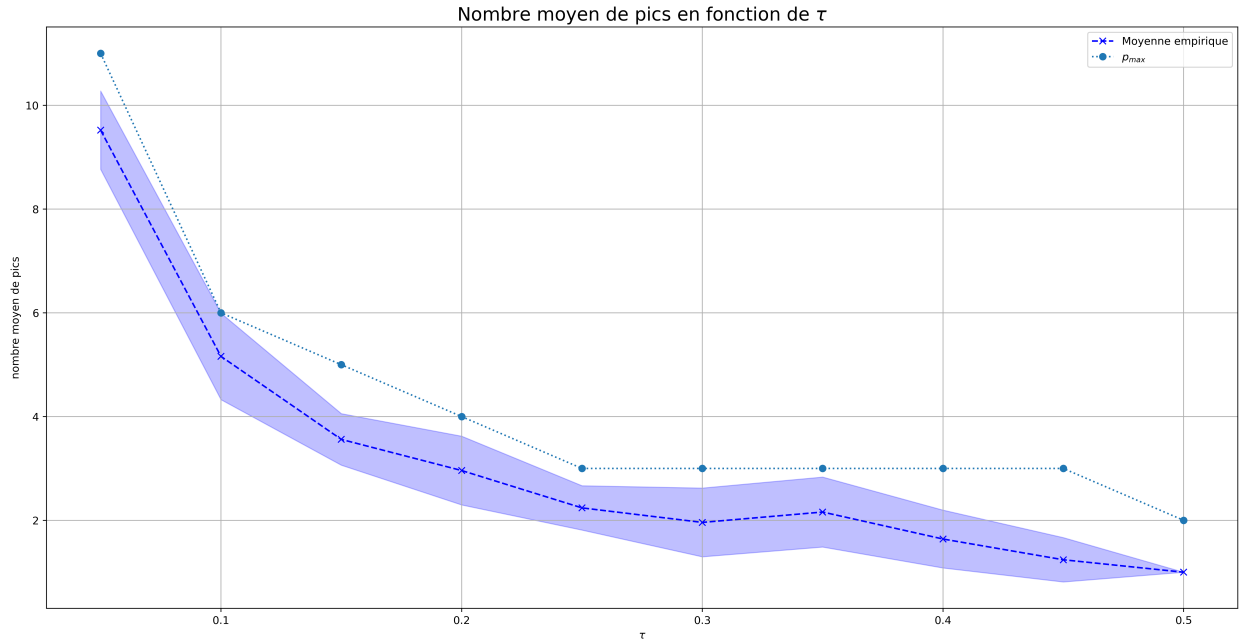


FIGURE 3.2 – Nombre de pics moyens en fonction de la valeur de  $\tau$ . Chaque point étant réalisé en moyennant en moyennant 25 dynamiques d’opinions dans un graphe complet de 200 agents avec  $\mu = 0.5$ . La courbe théorique correspond à la fonction  $p_{max}$  ci-dessus, en transparence on peut voir l’écart type de chaque mesure.

Il faut maintenant nous intéresser à l’emplacement et à la taille relative des différents pics d’opinions. On trace l’histogramme des opinions en superposant plusieurs simulations pour obtenir des tracés représentatifs.

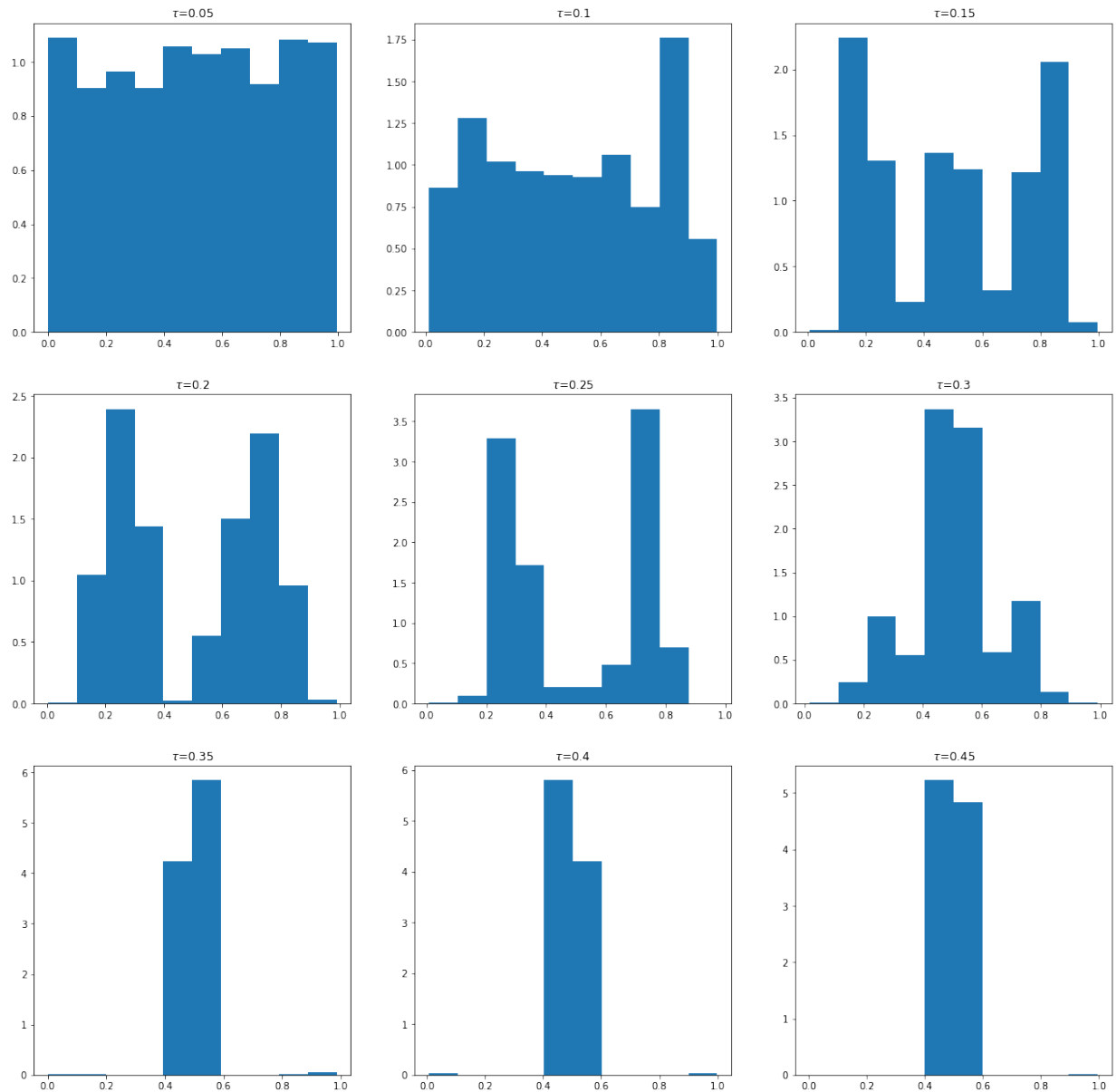


FIGURE 3.3 – Histogrammes de l’opinion finale des agents cumulé sur 50 simulations comprenant 200 individus ( $\mu = 0.5$ ).

Pour  $\tau$  très petit ( $< 0.1$ ) on constate une répartition presque uniforme de la distribution d’opinions finales lorsqu’on superpose plusieurs simulations. Les agents convergent alors en une multitude de petits pics dont les valeurs se répartissent uniformément. D.NEAU [10] parvient à décrire ce régime à l’aide d’une équation différentielle, il montre alors que la dynamique a tendance à renforcer les disparités préexistantes.

Au fur et à mesure que  $\tau$  augmente on observe des pics plus gros, de taille à peu près égale et régulièrement espacés dont l’emplacement a tendance à se fixer entre les simulations.

Dès que  $\tau > 0.2$  on remarque que deux pics commencent à prédominer même s’il peut arriver d’en observer un troisième de moindre importance dont l’emplacement n’est pas fixe entre les différentes simulations.

Enfin lorsque  $\tau > 0.3$  le pic central commence à prédominer, un second pic persiste quelque temps à ses cotés avant de disparaître. Pour  $\tau > 0.5$  on observe systématiquement une unique opinion finale située proche de 0.5, ce pic étant d’autant plus proche du centre du segment que  $\tau$  est proche de 1.

### 3.2.3 Influence du paramètre $\mu$

Si les premiers tracés semblent montrer que  $\mu$  n'a d'influence que sur la vitesse de convergence des pics une analyse plus précise montre que le rôle de ce paramètre est plus complexe. En traçant l'opinion finale de chaque agent en fonction de son opinion initiale on remarque que contrairement à ce qu'on pourrait penser les agents ne rejoignent pas systématiquement le pic le plus proche. En effet une valeur de  $\mu$  élevée semble favorable à des changements d'opinions importants et un agent peut parfaitement rejoindre un pic éloigné de son opinion initiale.

Ainsi même si la valeur de  $\mu$  n'as pas d'influence significative sur l'emplacement des pics une valeur petite aura tendance à amplifier l'effet de cloisonnement des opinions tout aussi sûrement qu'une petite valeur de  $\tau$ . En revanche une grande valeur de  $\mu$  favorisera les échanges et le recouvrement des pics dans le diagramme.

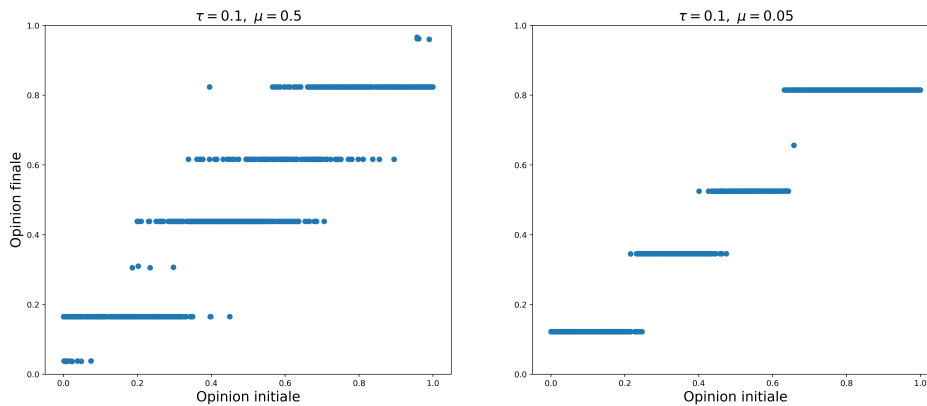


FIGURE 3.4 – Opinion finale en fonction de l'opinion initiale pour différent paramètre (N=1000).

Lorsqu'on autorise deux valeurs pour  $\mu$  comme dans [13] on observe que les agents ouverts d'esprit servent d'intermédiaires et permettent des mouvements d'opinions importants.

## 3.3 Cas du graphe grille

Le cas du graphe grille est similaire au cas du graphe complet tout en apportant son lot de subtilité. En effet dès lors que le graphe des relations n'est plus complet, la topologie du graphe va beaucoup influencer la dynamique. La similarité des opinions n'est plus le seul critère à prendre en compte, il faut aussi être voisin dans le graphe pour pouvoir communiquer.

### 3.3.1 Première observation

Pour cette partie on commence par suivre les réflexions de D.NEAU [10] avant d'apporter quelques réflexions personnelles.



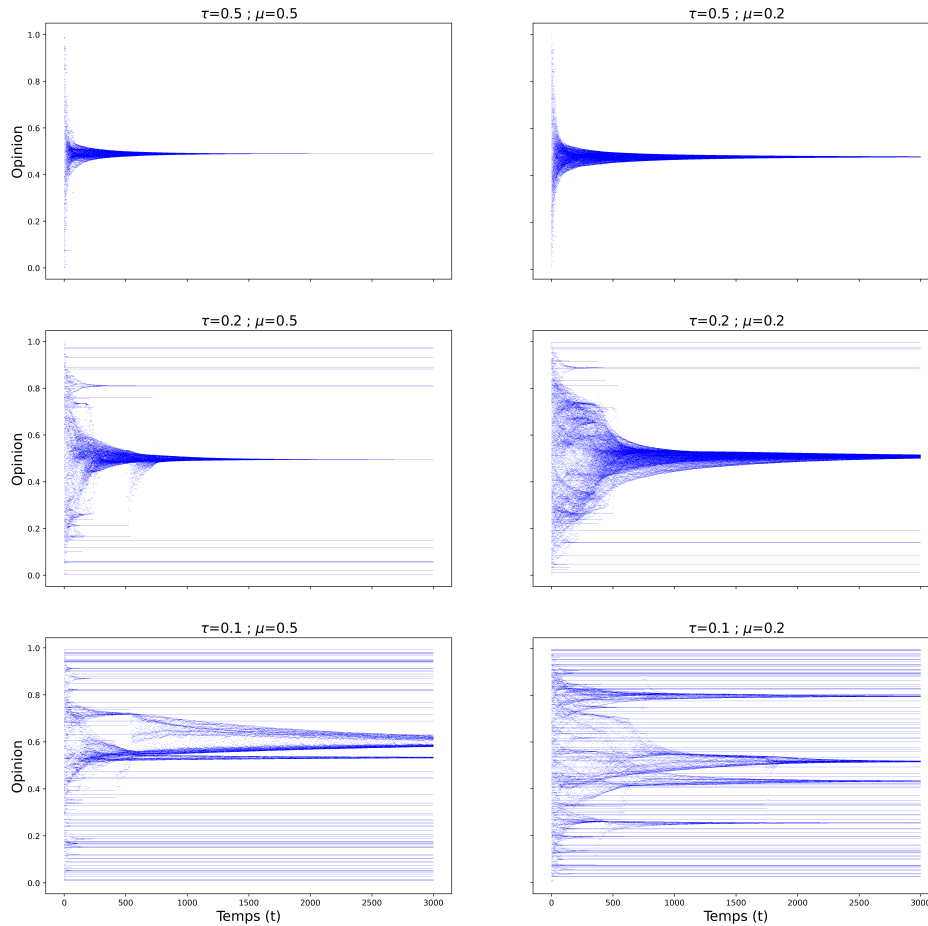


FIGURE 3.5 – Opinions en fonction du temps de chacun des agents dans un graphe grille de côté  $l = 18$  pour différentes valeurs des paramètres  $\tau$  et  $\mu$ .

On commence par observer un comportement très similaire au premier cas avec une convergence des opinions vers un certain nombre de pics. A première vue pour  $\tau < 0.5$  le nombre de pics est notablement plus importants que dans le cas du graphe complet.

Pour de grandes valeurs de  $\tau$  ( $> 0.45$ ) le comportement est identique à celui observé dans le graphe complet : il y a consensus autour d'une opinion centrale située au alentour de 0.5.

Lorsque  $\tau$  diminue on observe toujours un pic central ultra prédominant au sein duquel sont réunis la plupart des agents mais il subsiste quelques agents, isolés ou par petits groupes qui ont des opinions éloignées du pic central. Le nombre de pics est donc notablement plus élevé que dans le cas précédent. En traçant la grille avec une échelle de couleurs pour représenter les différentes opinions on remarque que le pic central correspond à un grand amas homogène qui sépare les unes des autres des taches d'opinions différentes. L'éloignement spatiale de ces taches d'opinions les empêchent de converger et d'adopter une opinion semblable.

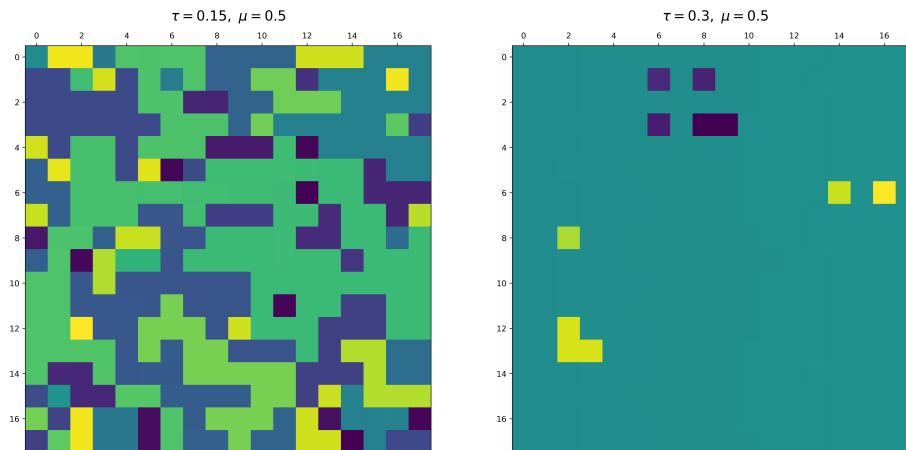


FIGURE 3.6 – Représentation de la grille finale pour différents paramètres de dynamiques dans le cas du graphe grille de côté  $l = 18$ , les opinions sont représentées par une échelle de couleurs

Quand  $\tau$  diminue encore pour descendre en dessous de 0.15 les taches d'opinions deviennent de plus en plus nombreuses tandis que le pic central devient de moins en moins dominant. Finalement il n'y a alors plus d'amas homogènes mais seulement une multitude de petites taches désordonnées qui coexistent sans jamais converger du fait de leur éloignement spatial.

A première vue les paramètres  $N$  et  $\mu$  semblent jouer un rôle parfaitement similaire à ce que l'on pouvait observer dans le cas du graphe complet.

### 3.3.2 Processus de formation du pic central

Alors que dans le cas du graphe complet la formation des pics semble être un processus relativement continu on observe dans le cas du graphe grille un phénomène de décrochage qui mérite d'être décrit plus précisément. Quand on observe le graphe suivant on observe, par exemple à  $t = 6000$ , un décrochage au cours duquel un pic marginal va rejoindre le pic central qui correspond à l'amas homogène.

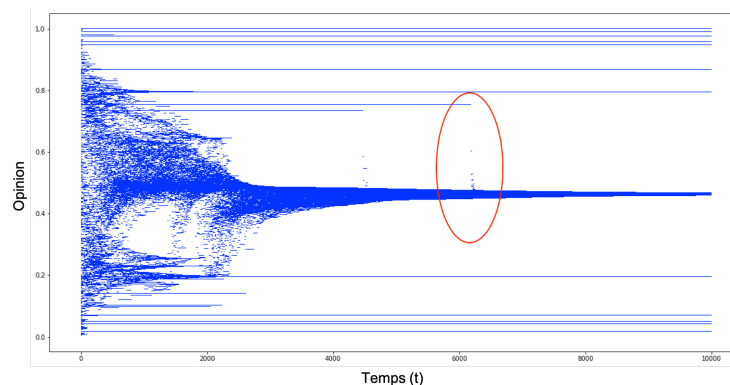


FIGURE 3.7 – Opinions en fonction du temps de chacun des agents dans un graphe grille de coté  $l = 18$  avec pour paramètre  $\tau = 0.24$  et  $\mu = 0.5$ , en rouge le décrochage d'opinion qu'on se propose d'étudier.

On peut alors tracer la grille des opinions autour de cet instant pour mieux comprendre le phénomène. Nous sommes alors en train d'observer l'intégration de l'agent vert en  $(3, 10)$ , de part la nature du processus cet agent ne va pas seulement diminuer son opinion jusqu'à rejoindre l'amas majoritaire, pour l'intégrer au groupe les agents d'opinions majoritaires autour de lui doivent se rapprocher de l'agent en  $(3, 10)$ . Le processus

d'intégration se déroule alors comme une onde sur le plan qui s'estompe peu à peu dans la masse homogène. Ainsi on remarque que l'intégration d'un seul agent nécessite l'implication d'un nombre important d'agents qui doivent quitter le groupe momentanément.

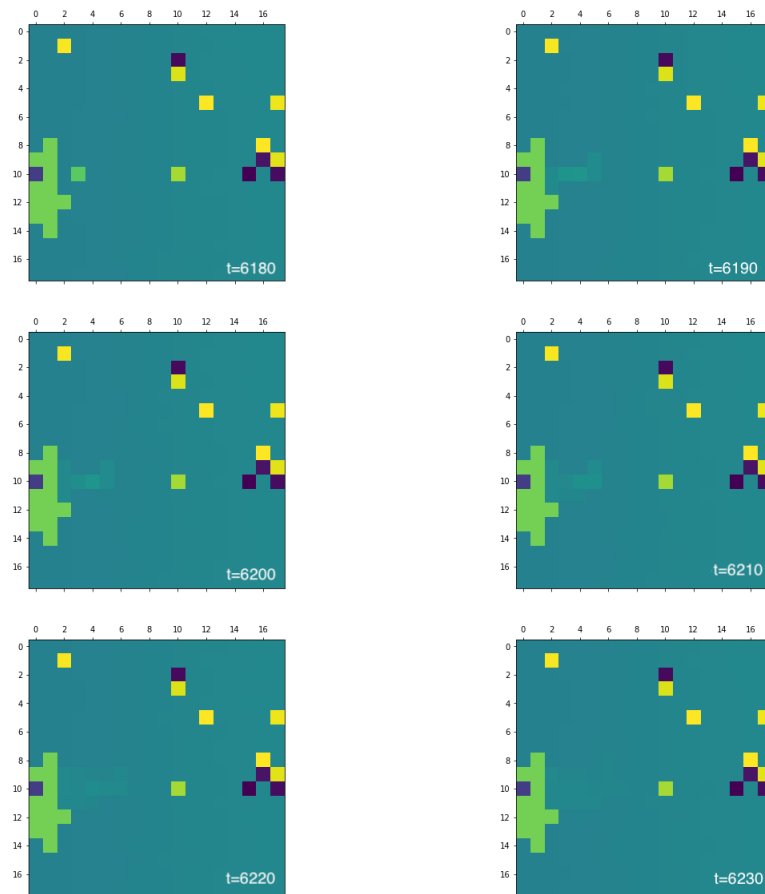


FIGURE 3.8 – Représentation de la grille des opinions au moment du décrochage d'opinion précédemment observé.

### 3.3.3 Opinion finale vs Opinion initiale

Encore une fois le tracé de l'opinion finale en fonction de l'opinion initiale se révèle instructif. On constate de manière assez claire le gros amas homogène autour de 0.5, et deux groupes constitués d'agents d'opinions extrémales similaires, mais qui ne convergent pas vers une même opinion à cause de l'éloignement spatial.

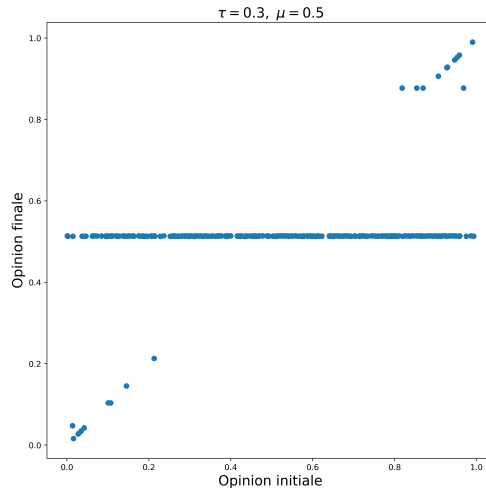


FIGURE 3.9 – Opinion finale en fonction de l’opinion initiale dans un graphe grille de coté  $l = 18$ .

Il est intéressant de remarquer que les agents qui ne convergent pas vers l’amas homogène sont les agents qui avaient dès l’instant initial une opinion extrême, les agents qui ne changent que très peu d’opinion au cours de l’ensemble du processus sont les agents extrémistes.

### 3.4 Cas du graphe *Scale Free*

Dés que l’on souhaite simuler des dynamiques d’opinions réelles il faut se demander quelle forme doit avoir le graphe représentant les relations entre les différents agents. Les graphes présentant une topologie simple sont faciles à étudier mais il est clair qu’ils sont peu représentatifs de la situation réelle. Ainsi en 1967 Stanley MILGRAM montre dans une expérience bien connue<sup>1</sup> [17] que deux individus choisis au hasard dans la population américaine sont reliés par une chaîne contenant moins de 6 relations. On retrouve cette propriété dans plusieurs graphes de relations réelles notamment dans celui de Facebook, comme tend à le montrer plusieurs études menées en partenariat avec l’entreprise [18], [19], on parle alors de graphe *small world*. Cependant ni les graphes complets ou grilles, ni même les graphes aléatoires d’Erdős-Renyi ne possèdent cette propriété qui semble pourtant avoir une grande importance dans la compréhension de la dynamique d’opinion.

A.BARABASI et R.ALBERT montrent en 1999 [20] que de nombreux grands graphes de relations issus de domaines aussi divers que la génétique ou l’informatique possèdent une propriété commune : la distribution du degré des sommets suit une loi de puissance, on parle de graphe *scale free*. Il montre que cela est la conséquence de deux mécanismes génériques :

1. le réseau s’étend continuellement par l’ajout de nouveau sommet
2. les nouveaux sommets préfèrent se relier à des sites qui sont déjà très connectés au sein du réseau

Quiconque ayant créé un compte sur un réseau social comme Facebook, Instagram ou Twitter peut se rendre compte que ces mécanismes existent bel et bien. Leur énonciation permet à A.BARABASI et R.ALBERT de fournir un algorithme produisant des graphes *scale free*.

Les lois de puissances et par conséquent les graphes *scale free* sont des lois très communes dans la nature et qui permettent de décrire un nombre conséquent de phénomènes naturels, on les retrouve aussi bien en biologie (génétique), en informatique (world wide web), en physique, en économie (distribution de Pareto), sociologie mais aussi dans des domaines plus originaux comme en littérature (graphe des relations intertextuelles) ou au cinéma (graphe des acteurs ayant joué dans le même film). MEJ NEWMAN [21] explique comment il est possible de mesurer une loi de puissance avant de faire un état de toutes les propriétés connues sur cette loi. Une des propriétés les plus intéressantes est celle d’absence d’échelle<sup>2</sup>, c’est à dire que si on zoome dans la distribution

1. On ne parle pas ici de la très fameuse expérience de MILGRAM sur la soumission à l’autorité mais bien d’une autre de ses expériences non moins connue où il demande à des personnes de faire parvenir une lettre à un parfait inconnu en l’envoyant à une de leur connaissance susceptible de connaître ce destinataire

2. en anglais on dit *scale free*, on comprend alors d’où provient le nom du graphe

d'une loi de puissance on retrouve cette même distribution à renormalisation près. Dans le cas des graphes *scale free* cette propriété traduit la forme de fractale que ce type de graphe présente. Ainsi il est possible de parler des relations entre des communautés d'agents plutôt qu'entre des agents isolés, les résultats obtenus en termes de communautés gagnent alors en pertinence puisque les modèles qui pourraient sembler fantaisistes en terme d'opinion individuelle ne le sont plus quand on considère les opinions d'une communauté par nature plus stable car moins sensible au comportement individuel extrême. AXELROD avait déjà proposé cette idée dans le cas du graphe grille mais elle ne trouve toute sa pertinence que dans le cas du graphe *scale free*.

Ainsi il semble pertinent de continuer notre étude des dynamiques d'opinions en considérant un graphe *scale free*. Le modèle de Deffuant a été peu étudié dans ce cas à l'exception de deux articles [12] et [22] sur lesquels nous nous sommes basés pour commencer notre étude.

### 3.4.1 Première observation

Comme pour les deux autres modèles on commence notre étude en observant l'opinion des agents en fonction du temps pour différentes valeurs de  $\tau$  et de  $\mu$ .

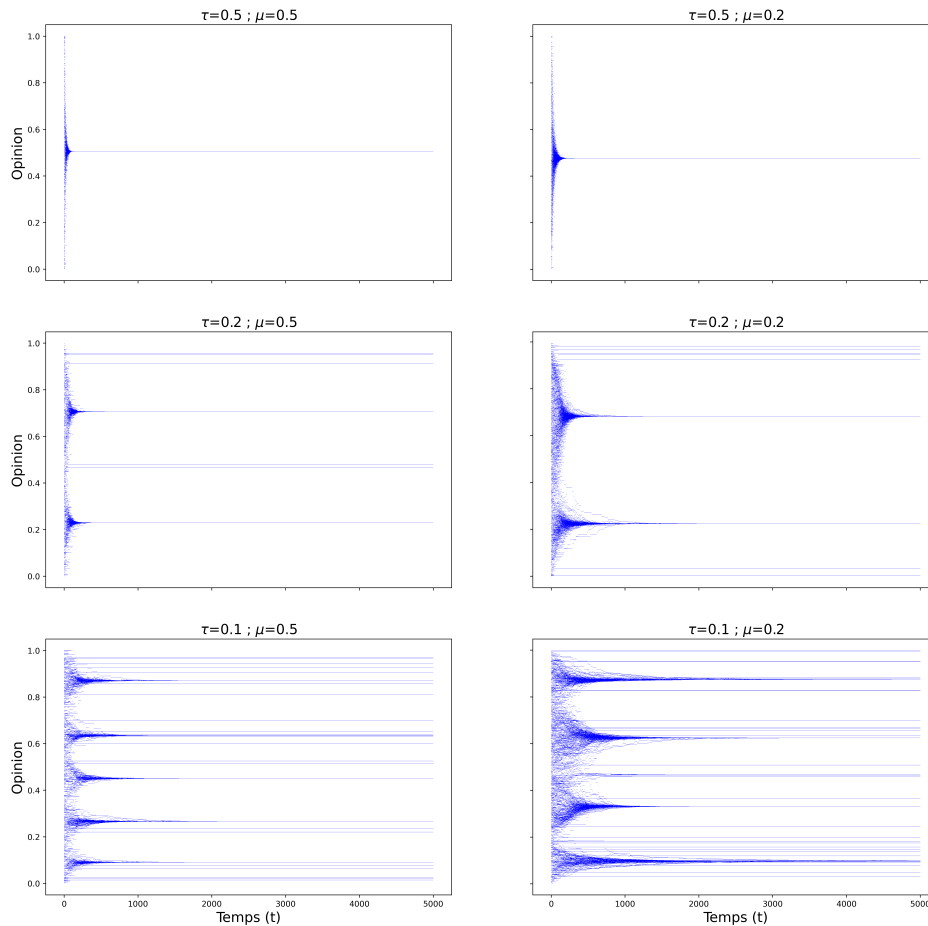


FIGURE 3.10 – Opinions en fonction du temps de chacun des agents dans un graphe *scale free* constitué de  $N = 500$  agents pour différentes valeurs des paramètres  $\tau$  et  $\mu$ . Le graphe *scale free* ayant été généré par l'algorithme de Barabasi-Albert chaque noeud nouvellement arrivé devant se connecter à  $M = 8$  agents.

Similairement à ce que l'on pouvait observer dans le cas du graphe complet et du graphe grille, les opinions convergent vers un petit nombre de pics. Le nombre de pics finaux étant semble-t-il nettement plus important que dans le cas du graphe complet mais significativement moins important que dans le cas du graphe grille.

L'allure des courbes d'opinion est hybride entre celle du graphe complet et celle du graphe grille. Pour  $\tau > 0.5$  on observe comme dans les deux cas précédents convergence vers une unique opinion située autour de 0.5. Lorsque  $\tau$  diminue on remarque, comme dans le cas du graphe complet, convergence vers plusieurs gros pics d'opinion, pics d'autant plus nombreux que  $\tau$  est petit. Mais on note également la présence de plusieurs agents ou petits groupes d'agents qui ne rejoignent aucun des gros pics de convergence sûrement à cause de leur isolement spatiale.

Tandis que pour  $\tau$  très petit ( $< 0.1$ ) il n'était pas vraiment possible de distinguer de pics d'opinion nettement plus grands que les autres, dans le cas du graphe *scale free* on observe quand même plusieurs pics notablement plus importants que les autres.

Les paramètres  $N$  et  $\mu$  semblent jouer un rôle parfaitement similaire à ce que l'on pouvait observer dans les deux autres cas.

### 3.4.2 Processus de formation des pics

Dans le cas du graphe grille on observait un phénomène de décrochage au cours duquel un agent rejoignait le pic central. On peut observer ce phénomène dans le cas du graphe *scale free*, ce phénomène est cependant beaucoup plus lent certainement car la densité du graphe *scale free* est plus importante que celle du graphe grille ce qui a tendance à ralentir l'onde d'assimilation. Ainsi le processus d'intégration des agents dans un pic semble plus continu et donc plus proche de celui observé dans le cas du graphe complet.

Ce processus intervient également beaucoup plus tôt dans la dynamique, là aussi la densité semble jouer un rôle important. Plus la densité est grande plus l'agent à intégrer aura de voisins susceptibles de l'intégrer donc ses chances d'être intégré dans les premiers instants de la dynamique sont élevées, mais en même temps ce grand nombre de voisins ralentit la propagation de l'onde d'assimilation qui doit atteindre un plus grand nombre d'agents, une fois commencée l'assimilation est donc d'autant plus longue que le graphe est dense.

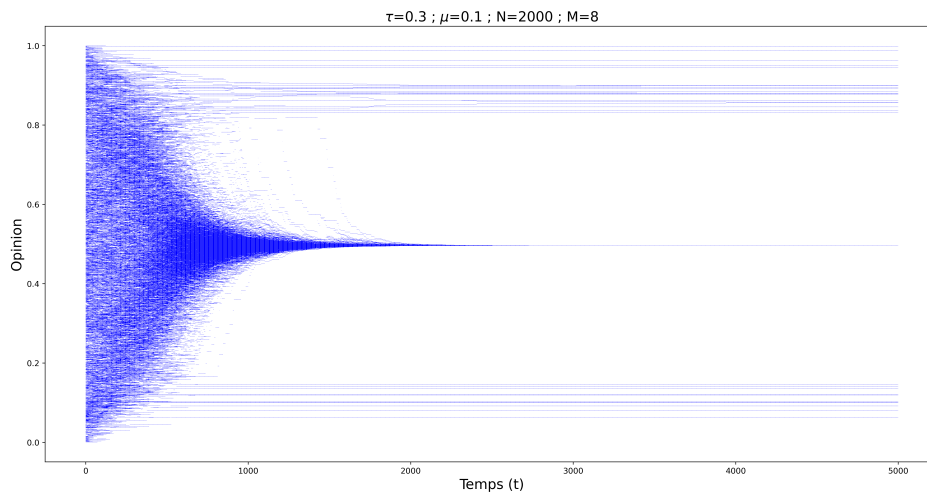


FIGURE 3.11 – Opinion de chaque agent en fonction du temps dans un graphe *scale free* de taille  $N = 500$ . On observe le phénomène de décrochage vers le pic central.

### 3.4.3 Opinion initiale vs Opinion finale

On continue notre étude en traçant l'opinion finale en fonction de l'opinion initiale et on remarque deux choses. Tout d'abord, comme dans le cas du graphe grille, les agents qui ne changent pas d'avis sont des agents d'opinions extrêmes. Ensuite, de même que dans le cas du graphe complet, les agents qui rejoignent des pics ne rejoignent pas nécessairement le pic le plus proche, selon la valeur de  $\mu$  ils peuvent rejoindre un pic plus éloigné.

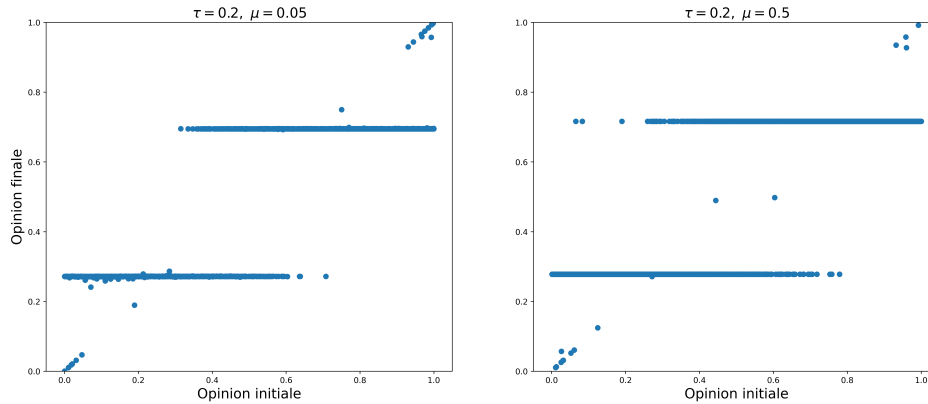


FIGURE 3.12 – Opinion finale en fonction de l’opinion initiale dans une graphe *scale free* de taille  $N = 2000$  ( $M = 8$ ) pour différents paramètres.

### 3.4.4 Influence de la densité sur la dynamique d’opinion

Ainsi on se rend compte que le modèle de Deffuant dans le cas du graphe *scale free* adopte un comportement hybride entre le cas du graphe complet et du graphe grille. Au-delà de la topologie particulière c’est donc la densité du graphe qui semble jouer un rôle important dans la dynamique d’opinion.

Dés que le graphe n’est plus complet on peut observer des phénomènes qui sont dus à l’apparition d’une notion de distance spatiale entre les agents, ainsi certains agents d’opinions similaires ne vont pas converger vers une même opinion du fait de leur isolement géographique. On a également déjà discuté de l’importance de la densité dans le processus d’assimilation des agents au sein des pics d’opinions, aussi bien en terme de durée d’assimilation qu’en ce qui concerne le début de ce processus.

On observe de plus une certaine continuité des comportements dans la mesure où sur des graphes de densité proche le modèle adoptera un comportement similaire.

### 3.4.5 Degrés des agents

Le comportement du modèle de Deffuant dans un graphe *scale free* n’est donc pas foncièrement différent que dans le cas complet ou grille. Cependant contrairement au graphe grille et au graphe complet, les sommets des graphes *scale free* ont des degrés très variés. On peut donc s’intéresser à l’opinion des agents en fonction de leur degré.

Dans un premier temps on peut tracer l’opinion finale en fonction du degré du sommet. On remarque que les agents qui n’ont pas rejoint un pic d’opinion sont des agents qui sont isolés sur le graphe.

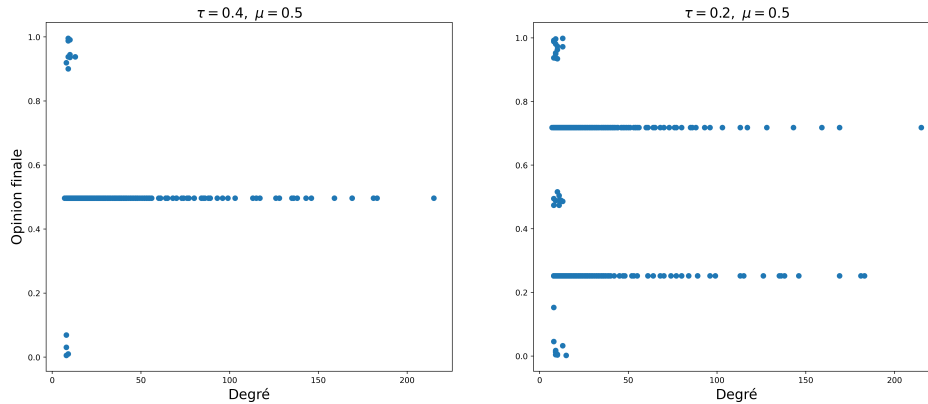


FIGURE 3.13 – Opinion finale en fonction du degré dans une graphe *scale free* de taille  $N = 2000$  ( $M = 8$ ) pour différents paramètres.

De même on peut mettre en évidence dans le graphe opinion initiale vs. opinion finale les 25% d’agents les moins connectés, on s’aperçoit alors que les agents qui ne varient pas d’opinion pendant la durée du processus sont très majoritairement des agents peu connectés.

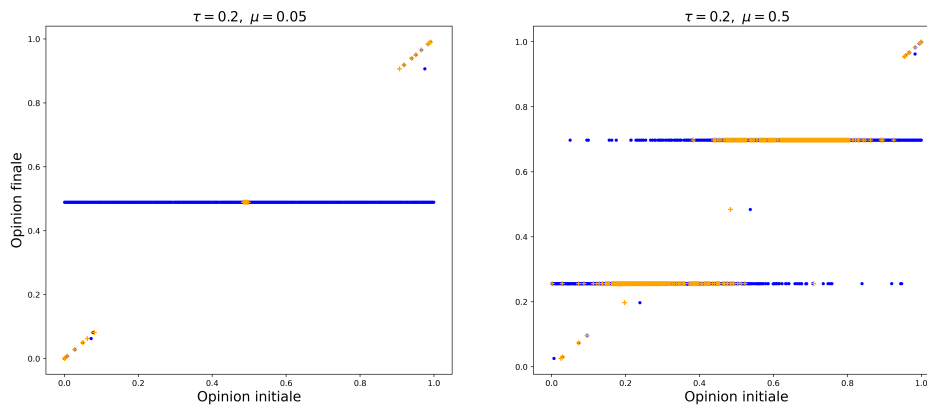


FIGURE 3.14 – Opinion finale en fonction de l’opinion initiale dans une graphe *scale free* de taille  $N = 2000$  ( $M = 8$ ) pour différents paramètres. Les 25% agents les moins connectés ont été représentés en orange.

Ainsi il semble bien que les agents qui restent isolés et qui refusent de réévaluer leur opinion sont presque toujours des agents peu connectés au sein du graphe. En revanche dans la majorité des cas une partie non négligeable des agents peu connectés finit par rejoindre un des pics d’opinions. Il est intéressant de remarquer que les agents fortement connectés, représentation schématique des influenceurs, subissent l’influence du reste du groupe et modifient leur opinion.

### 3.5 Graphe connexe

L’étude du modèle de Deffuant continue que nous venons d’effectuer repose en très grande partie sur une série de simulations, en effet il existe très peu de résultats analytiques dans ce cas. Contrairement au *voter model* ou au modèle de Deffuant discret il n’existe pas de méthode analogue à celle des marches aléatoires duales pour analyser le modèle de Deffuant continu. D. STAUFFER [22] propose quelques pistes pour parvenir à un modèle dual mais même si l’on arrive à mener à bien l’argument nous n’obtiendrions que le problème dual d’une version simplifiée du modèle de Deffuant continu.



N. LANCHIER et H. LI ont récemment publié un premier article [11] où ils parviennent à étudier analytiquement la création d'un consensus avec le modèle de Deffuant continue dans le cas d'un graphe connexe. Cependant ces résultats existent au prix d'hypothèses fortes. Nous verrons que nos tentatives pour élargir ces résultats n'ont pas abouti.

### 3.5.1 Minoration de la probabilité de consensus

N. LANCHIER et H. LI [11] se placent dans le cadre très général que nous avons défini plus haut où  $\mathcal{G}$  est un graphe connexe fini quelconque, où l'espace d'opinion  $\Delta$  est un sous ensemble borné convexe de  $\mathbb{R}^n$  et où la distribution initiale est quelconque. Puisque  $\Delta$  est borné convexe on peut noter  $\mathbf{r} = \inf \{r > 0 \mid \exists c \in \Delta, \Delta \subset B(c, r)\}$  le *rayon de l'espace d'opinion* on fixe un  $\mathbf{c} \in \Delta$  tel que  $\Delta \subset B(\mathbf{c}, \mathbf{r})$ .

Leur théorème fournit alors une borne inférieure pour la probabilité d'atteindre un consensus dans le cas où  $\tau > \mathbf{r}$  :

**Théorème 3.5.1** (théorème 2.1 dans [11]). *Avec les notations précédemment introduite, pour tout  $\tau > \mathbf{r}$  on a :*

$$\mathbb{P}(\mathcal{C}) \geq 1 - \frac{\mathbb{E}(\|X - \mathbf{c}\|)}{\tau - \mathbf{r}}$$

où est l'événement "consensus" :  $\mathcal{C} = \left\{ \lim_{t \rightarrow +\infty} \max_{(x,y) \in \mathcal{E}} \|\xi_t(x) - \xi_t(y)\| = 0 \right\}$ .

L'hypothèse  $\tau > \mathbf{r}$  est une hypothèse très forte, par exemple si on se place dans le cadre des trois simulations précédentes les valeurs de  $\tau$  autorisé sont celle où  $\tau > 0.5$  mais alors on a remarqué que pour de telles valeurs de  $\tau$  un consensus est toujours atteint, et on peut donc espérer obtenir une meilleure borne que celle fournie par ce théorème. C'est pour cela que nous avons chercher, malheureusement sans succès, à nous débarrasser de cette hypothèse.

### 3.5.2 Preuve du théorème

On reproduit ici l'essentielle de la preuve de N.LANCHIER et H. LI sans s'attarder sur les détails techniques, le lecteur intéressé par ces détails trouvera son bonheur dans l'article [11].

La preuve repose sur deux argument clés :

1. le premier consiste à remarquer que la dynamique d'opinion converge presque sûrement vers une situation d'équilibre limite aléatoire.
2. le second consiste à étudier un ensemble de processus auxiliaires qui mesurent l'ensemble des désaccords entre une certaine opinion préalablement fixé  $c \in \Delta$  et l'opinion de chacun des agents, et à remarquer que ces processus auxiliaires sont tous des surmartingales bornées.

**Argument clé 1 :** l'objectif est donc de montrer que peu importe la distribution initiale, la dynamique d'opinion converge presque sûrement vers une situation qui n'évolue plus, c'est à dire une situation où tous les voisins partagent la même opinion ou sont trop en désaccord pour interagir i.e :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \xi_t(x) = \xi_\infty(x) \text{ existe pour tout } x \in \mathcal{V} \tag{3.1}$$

$$\|\xi_\infty(x) - \xi_\infty(y)\| \notin ]0, \tau] \text{ pour toute arête } (x, y) \in \mathcal{E}. \tag{3.2}$$

La preuve de (3.1) et (3.2) repose entièrement sur deux lemmes, on renvoie à [11] pour la preuve de ces lemmes.

**Lemme 3.5.2** (lemme 3.3 dans [11]). *Pour tout  $\epsilon > 0$  on dispose de  $S = S(\epsilon)$  presque sûrement fini tel que :*

$$\forall s \geq S, \forall x \in \mathcal{V}, \|\xi_s(x) - \xi_{s-1}(x)\| < \epsilon.$$

**Lemme 3.5.3** (lemme 3.4 dans [11]). *Pour tout  $\epsilon \in ]0, \tau[$  on dispose de  $T = T(\epsilon)$  presque sûrement fini tel que :*

$$\forall s \geq T, \forall (x, y) \in \mathcal{E}, \|\xi_s(x) - \xi_s(y)\| \notin [\epsilon, \tau].$$

**Argument clé 2 :** Pour  $c \in \Delta$  on note  $(X_t(c))_{t \in \mathbb{N}}$  le processus auxiliaire défini par

$$X_t(c) = \sum_{x \in \mathcal{V}} \|\xi_t(x) - c\|.$$

Cette quantité peut être rapprochée à la notion d'énergie en physique étant donné qu'elle peut être vue comme une mesure du désordre que l'on souhaite voir diminuer au fur et à mesure du processus. En effet la propriété primordiale de ce processus auxiliaire est sa décroissance :

**Lemme 3.5.4** (lemme 3.2 dans [11]). *Pour tout  $c \in \Delta$  et tout  $s \leq t$  :*

$$0 \leq X_t(c) \leq X_s(c) \leq 2r \cdot \#\mathcal{V}.$$

*Démonstration.* voir [11] lemme 3.2 ■

Ce lemme implique que les processus auxiliaires sont tous des surmartingales bornées ce qui nous permettra par la suite d'appliquer le théorème d'arrêt.

**Fin de la preuve :** Avant de terminer la preuve du théorème il nous faut définir le bon temps d'arrêt et relier l'évènement "consensus" à ce dernier. Soit

$$T_* = \inf \left\{ t \in \mathbb{N} \mid \forall (x, y) \in \mathcal{E}, \|\xi_t(x) - \xi_t(y)\| \notin \left[ \frac{\tau}{2}, \tau \right] \right\}.$$

On remarque que  $T_*$  est un temps d'arrêt pour la filtration naturelle et qu'il est presque sûrement fini d'après le lemme 3.5.3. On cherche maintenant à identifier un évènement qui conduira toujours au consensus s'il est réalisé :

$$\mathcal{A} = \bigcup_{x \in \mathcal{V}} \left\{ \sup_{c \in \Delta} \{ \|\xi_{T_*}(x) - c\| < \tau \} \right\}.$$

Cette évènement étant réalisé quand au temps  $T_*$  il existe un agent capable de communiquer avec toutes les opinions possibles. Le lemme suivant est alors très intuitif :

**Lemme 3.5.5** (lemme 4.2 dans [11]). *On a l'inclusion  $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$ .*

*Démonstration.* voir [11] lemme 4.2 ■

Puisque pour tout  $c \in \Delta$  le processus  $(X_t(c))_{t \in \mathbb{N}}$  est une surmartingale bornée par rapport à la filtration naturelle et que  $T_*$  est un temps d'arrêt presque sûrement fini par rapport à cette même filtration alors on peut appliquer le théorème d'arrêt, pour tout  $c \in \Delta$  :

$$E(X_{T_*}(c)) \leq E(X_0(c)) = E \left( \sum_{x \in \mathcal{V}} \|\xi_0(x) - c\| \right) = \#\mathcal{V} \cdot E(\|X - c\|).$$

Ensuite sur le complémentaire de  $\mathcal{A}$ , Pour tout  $x \in \mathcal{V}$  on dispose de  $c_x \in \Delta$  tel que  $\|\xi_{T_*}(x) - c_x\| \geq \tau$ . L'inégalité triangulaire implique alors

$$\|\xi_{T_*}(x) - \mathbf{c}\| \geq \|\xi_{T_*}(x) - c_x\| - \|c_x - \mathbf{c}\| \geq \tau - r \text{ pour tout } x \in \Delta.$$

On obtient alors une minoration de l'espérance conditionnelle

$$\mathbb{E}(X_{T_*}(\mathbf{c}) \mid \mathcal{A}^c) = \mathbb{E} \left( \sum_{x \in \mathcal{V}} \|\xi_{T_*}(x) - \mathbf{c}\| \mid \mathcal{A}^c \right) \geq (\tau - \mathbf{r}) \cdot \#\mathcal{V}.$$

Par suite

$$\mathbb{E}(X_{T_*}(\mathbf{c})) \geq \mathbb{E}(X_{T_*}(\mathbf{c}) \mid \mathcal{A}^c) \cdot \mathbb{P}(\mathcal{A}^c) \geq (\tau - \mathbf{r}) \cdot \#\mathcal{V} \cdot \mathbb{P}(\mathcal{A}^c).$$

En appliquant le théorème d'arrêt avec  $c = \mathbf{c}$  et avec la minoration précédente on obtiens

$$(\tau - \mathbf{r})(1 - \mathbb{P}(\mathcal{A})) \leq \frac{\mathbb{E}(X_{T_*}(\mathbf{c}) \mid \mathcal{A}^c) \mathbb{P}(\mathcal{A}^c)}{\#\mathcal{V}} \leq \frac{\mathbb{E}(X_{T_*}(\mathbf{c}))}{\#\mathcal{V}} \leq \mathbb{E}(\|X - \mathbf{c}\|).$$

On en déduit avec le lemme 3.5.5

$$\mathbb{P}(\mathcal{C}) \geq \mathbb{P}(\mathcal{A}) \geq 1 - \frac{\mathbb{E}(\|X - \mathbf{c}\|)}{\tau - \mathbf{r}} \quad \text{pour tout } \tau > \mathbf{r}.$$

Ce qui termine la preuve.

### 3.5.3 Tentative de généralisation

Comme on l'a vu, le théorème 3.5.1 repose sur l'hypothèse forte  $\tau > \mathbf{r}$ , pourtant c'est le cas  $\tau \leq \mathbf{r}$  qui semble le plus intéressant. C'est pourquoi nous avons tenté, malheureusement sans succès, d'étendre ce théorème au cas  $\tau \leq \mathbf{r}$ . Nous avons également tenté d'utiliser les mêmes méthodes pour estimer la probabilité d'obtenir deux pics d'opinions mais une fois encore cela fut un échec.

Tout d'abord on peut remarquer que les arguments clés restent valides dans le cas  $\tau \leq \mathbf{r}$ , ainsi la dynamique converge presque sûrement vers une situation d'équilibre limite aléatoire et les processus auxiliaires  $X_t(c)$  restent des surmartingales bornées.

La preuve précédente n'est pas valable pour  $\tau < \mathbf{r}$  car dans ce cas l'évènement  $\mathcal{A}$  est vide, on se retrouve alors à conditionner par le vide. Une première piste pour généraliser le théorème serait donc de modifier l'évènement  $\mathcal{A}$  pour obtenir un évènement compatible avec la situation :

$$\mathcal{A} = \bigcup_{x \in \mathcal{V}} \left\{ \sup_{y \in \mathcal{V}} \{ \|\xi_{T_*}(x) - \xi_{T_*}(y)\| < \tau \} \right\}.$$

Ainsi au lieu de nous demander si au temps  $T_*$  il existe un agent capable de communiquer avec toutes les opinions possibles, on se demande si au temps  $T_*$  il existe un agent capable de communiquer avec toutes les opinions exprimées. Il est assez clair que l'on a toujours l'inclusion  $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$ .

Le théorème d'arrêt est toujours valable pour tout  $c \in \Delta$  :

$$E(X_{T_*}(c)) \leq E(X_0(c)) = E \left( \sum_{x \in \mathcal{V}} \|\xi_0(x) - c\| \right) = \#\mathcal{V} \cdot E(\|X - c\|).$$

On cherche maintenant à minorer  $\mathbb{E}(X_{T_*}(\mathbf{c}) \mid \mathcal{A}^c) = \mathbb{E}(\sum_{x \in \mathcal{V}} \|\xi_t(x) - c\| \mid \mathcal{A}^c)$ . Cette quantité est minimale quand on a placé le plus d'agents possibles en  $\mathbf{c}$ , on ne peut pas tous les y placer car sinon on serait dans  $\mathcal{A}$  et pas dans  $\mathcal{A}^c$ , il suffit d'en placer 1 à une distance strictement supérieure à  $\tau$  du centre  $\mathbf{c}$ . On a donc

$$\mathbb{E}(X_{T_*}(\mathbf{c}) \mid \mathcal{A}^c) \geq \tau.$$

On obtient alors la minoration de  $\mathbb{P}(\mathcal{C})$  suivant : pour tout  $\tau \leq \mathbf{r}$  :

$$\mathbb{P}(\mathcal{C}) \geq 1 - \frac{\#\mathcal{V}}{\tau} \mathbb{E}(\|X - \mathbf{c}\|).$$

Si ce résultat peut paraître cohérent à première vue, il n'a dans les faits aucun intérêt car dès que le nombre d'agents est conséquent il ne nous apprend rien d'autre que  $\mathbb{P}(\mathcal{C}) \geq 0$ .

Il nous faut donc nous débarrasser de  $\#\mathcal{V}$ , ce terme provient de la somme dans l'expression de  $X_t(c)$  on peut s'en débarrasser en changeant la définition du processus auxiliaire :

$$\forall t \in \mathbb{N}, \hat{X}_t = \sup_{(x,y) \in \mathcal{E}} \|\xi_t(x) - \xi_t(y)\|.$$

Admettons que ce processus est bien une surmartingale bornée ce qui est intuitivement raisonnable, alors le théorème d'arrêt donne :

$$\mathbb{E}(\hat{X}_{T_*}) \leq \mathbb{E}(\sup_{(x,y) \in \mathcal{E}} \|\xi_0(x) - \xi_0(y)\|).$$

Il faut ensuite minorer  $\mathbb{E}(\hat{X}_{T_*} | \mathcal{A}^c) = \mathbb{E}\left(\sup_{(x,y) \in \mathcal{E}} \|\xi_0(x) - \xi_0(y)\| | \mathcal{A}^c\right)$  le sup ayant clairement pour valeur minimale  $\tau$  sur  $\mathcal{A}^c$ . On obtient alors la minoration suivante, pour tout  $\tau \leq \mathbf{r}$  :

$$\mathbb{P}(\mathcal{C}) \geq 1 - \frac{1}{\tau} \mathbb{E}(\sup_{(x,y) \in \mathcal{E}} \|\xi_0(x) - \xi_0(y)\|).$$

Ce résultat est plus satisfaisant que le premier dans la mesure où il n'est pas nécessairement trivial lorsque l'on considère un groupe d'agents de taille conséquente. Pour une distribution initiale uniforme l'espérance du sup sera de l'ordre de  $\mathbf{r}$ , et le résultat n'aura pas d'intérêt mais pour une distribution plus concentrée il existe des valeurs de  $\tau \leq \mathbf{r}$  pour lesquelles cette minoration n'est pas évidente

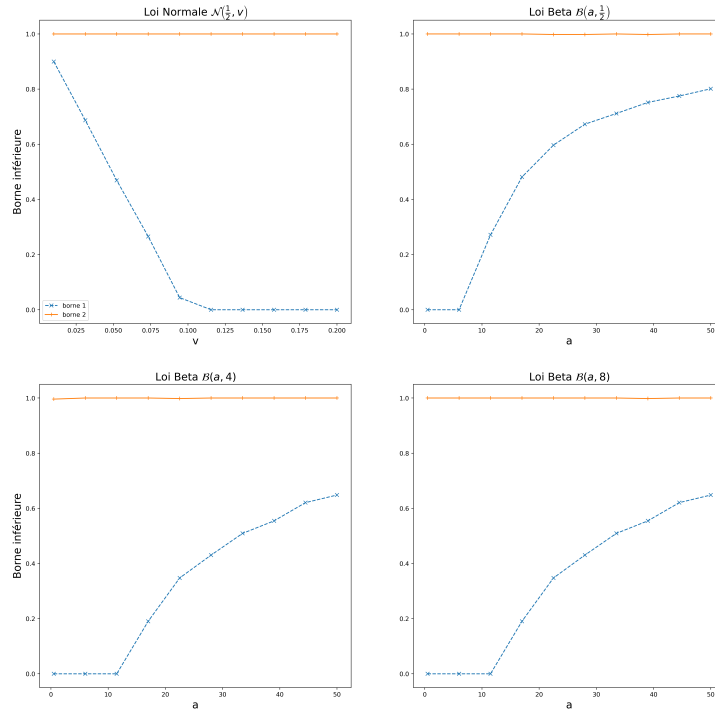


FIGURE 3.15 – Comparaison des bornes inférieures obtenues avec la méthode naïves (en orange) ou la méthode inspirée de l'article de N.LANCHIER (en bleu) pour différente loi. La loi normale n'étant pas une loi sur  $[0,1]$  mais on considère comme négligeable la probabilité qu'un agent soit doté initialement d'une opinion en dehors de cet intervalle pour les paramètres choisis ici.

Cependant dans [11] N.LANCHIER explique que, quelque soit la valeur  $\tau$  la probabilité de consensus est strictement positive dans la mesure où il est possible que tous les agents tombent dès le première instant dans une même boule de rayon  $\frac{\tau}{2}$  et que si cela arrivait il y aurait nécessairement convergence vers un consensus. On peut alors se demander si cette minoration naïve n'est pas meilleure que celle que nous venons d'obtenir.

Nous avons donc effectué des simulations 3.15 afin de visualiser les deux bornes, et on se rend compte que la borne que nous venons de calculer n'est strictement positive que lorsque la distribution initiale est resserrée mais dans ce cas la borne naïve est systématiquement meilleure. Ce dernier résultat n'est donc pas non plus satisfaisant.

Même si ces réflexions n'ont pu aboutir à rien de tangible, elles offrent des pistes intéressantes pour approfondir l'étude analytique du modèle de Deffuant. Par exemple la nouvelle définition de  $\mathcal{A}$  peut facilement être adaptée pour obtenir un évènement qui provoquera nécessairement l'apparition de deux pics d'opinion :

$$\mathcal{A}_2 = \bigcup_{(I,J) \in \mathcal{P}_2} \left\{ \bigcup_{i_0 \in I} \left\{ \sup_{i \in I} \|\xi_{T_*}(i_0) - \xi_{T_*}(i)\| \leq \tau \right\} \cap \bigcup_{j_0 \in J} \left\{ \sup_{j \in J} \|\xi_{T_*}(j_0) - \xi_{T_*}(j)\| \leq \tau \right\} \cap \left\{ \inf_{i,j \in I \times J} \|\xi_{T_*}(i) - \xi_{T_*}(j)\| > \tau \right\} \right\}$$

où  $\mathcal{P}_2$  est l'ensemble des partitions en deux groupes de  $\mathcal{V}$ . De même on peut alors créer pour  $n \in \mathbb{N}$  l'ensemble  $\mathcal{A}_n$  qui provoquera nécessairement l'apparition de  $n$  pics. Pour étudier la probabilité d'un tel évènement nous avons tenté, pour l'instant sans succès, d'étudier des processus auxiliaires inspirés des méthodes de *clustering* comme par exemple

$$X_t(c_1, c_2) = \sum_{x \in \mathcal{V}} \min_{i \in \{1,2\}} \|\xi_t(x) - c_i\|$$

pour  $c_1, c_2 \in \Delta$  suffisamment éloigné.

### 3.6 Graphe non complet : pic de variance

Le lecteur attentif n'aura pu que s'étonner de constater que nous avons étudié le modèle de Deffuant continu dans trois cas en suivant des plans en tout point similaire sauf en ce qui concerne l'étude graphique du nombre de pics d'opinions en fonction du palier  $\tau$ . Il ne s'agit pas d'un oubli, en effet en réalisant ces études graphiques dans le cas des deux graphes non complets nous avons constaté un phénomène qui mérite d'être mis plus en avant.

En étudiant le nombre de pics d'opinions en fonction du palier  $\tau$  dans le cas des graphes non complets on constate en effet une variation nettement plus importante du nombre de pics lorsque le palier se situe dans un intervalle qui s'étend grosso modo de 0.2 à 0.3. Ce *pic de variance* est un phénomène qui à notre connaissance n'a encore jamais été décrit et encore moins expliqué.

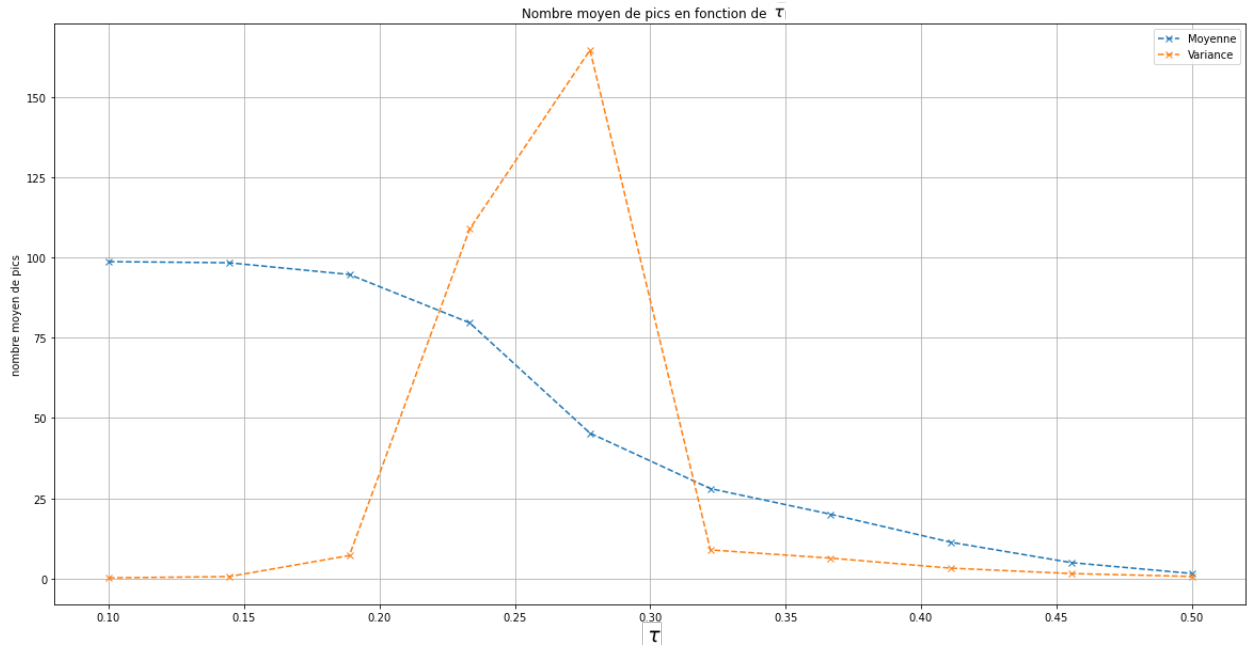


FIGURE 3.16 – Nombre de pics moyens en fonction de la valeur de  $\tau$ . Chaque point étant réalisé en moyennant 50 dynamiques d'opinions dans un graphe *scale free* ( $N=1000, M=2$ ).

S'il faudra continuer l'étude de ce pic de variance afin de le comprendre nous avons cependant commencé à explorer des pistes. En premier lieu il faut se demander s'il s'agit d'un véritable phénomène. Même si on ne peut pas complètement écarter l'hypothèse que ce phénomène n'est dû qu'à une erreur de codage ou à une instabilité numérique nous avons tout mis en oeuvre pour vérifier qu'il n'y avait pas de problème de ce côté là. Ensuite il faut écarter la possibilité que ce pic ne soit provoqué que par un problème de temps de convergence trop court. En effet notre algorithme pourrait avoir détecté comme deux pics d'opinions distincts des agents qui se rejoindraient à l'infini. Les méthodes algorithmiques qui nous permettraient d'écarter cette possibilité n'ont pas encore été mises en place, cependant la cohérence des valeurs calculées pour la moyenne rend hautement improbable une explication par un problème de convergence.

Si les pics de variance sont de véritables phénomènes il faut en chercher la cause. Tout d'abord comme il a déjà été dit ce phénomène n'est observé que dans le cas des graphes non complet, la notion de distance spatiale joue donc un jeu dans l'apparition de ce pic de variance.

Une explication reposant sur la taille du territoire, comme celle effectuée par AXELROD à propos de son modèle, semblait être une bonne idée. Cependant en faisant varier la taille du territoire 3.17 on ne parvient pas à mettre en évidence une corrélation entre le pic de variance et la taille du territoire.

Il faudra donc continuer à chercher des explications à ce pic de variance.

### 3.7 Conclusion

Encore une fois, bien que très simple à première vue, le modèle de Deffuant s'est révélé particulièrement complexe donnant même lieu à des phénomènes encore inexpliqués. Appliquer à un graphe de relation réelle (de type *scale free*) le modèle de Deffuant adopte de nombreux comportements observables dans la nature avec l'apparition de chambres d'échos plus ou moins nombreuses, ou avec l'isolement spatiale des agents d'opinions extrêmes.

Ce modèle de dynamiques d'opinions a pour l'instant été principalement étudié de manière purement théorique, pourtant la pertinence des observations que nous venons d'effectuer tend à montrer que de nombreuses applications pourraient être déduites des études de ce modèle. Des études sur les applications possibles ont été récemment effectuées, notamment dans cette article [23] où les auteurs montrent comment une reconfiguration du réseau (par exemple via la publicité ciblé) peut permettre d'atteindre plus rapidement un consensus quand la dynamique d'opinion suit le modèle de Deffuant.

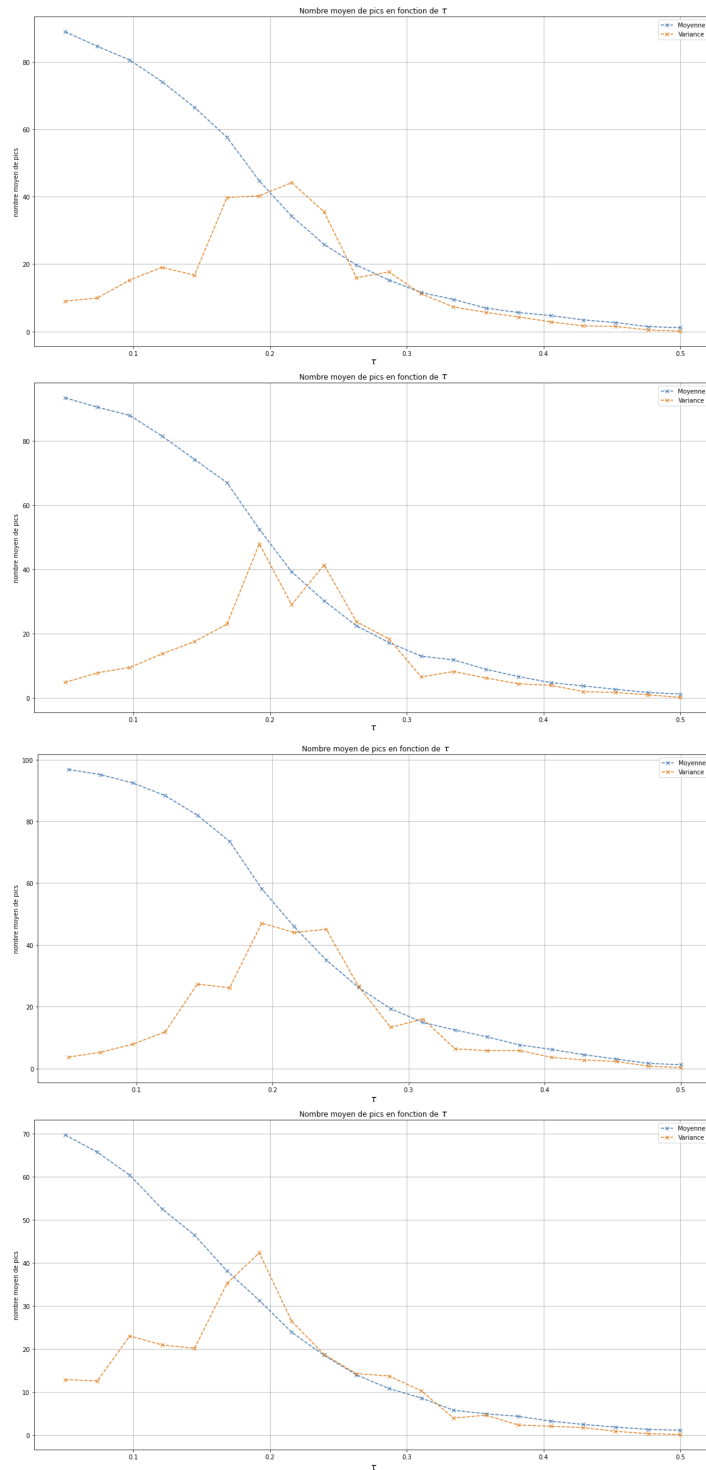


FIGURE 3.17 – Nombre de pics moyens en fonction de la valeur de  $\tau$ . Chaque point étant réalisé en moyennant 50 dynamiques d'opinions dans un graphe grille de taille  $l$  (de haut en bas  $l = 20; l = 18; l = 16; l = 12$ ) avec  $\mu = 0.5$ .

# Bibliographie

- [1] T. Hirsher. Consensus formation in the deffuant model. Master's thesis, Chalmers University of technology and University of Gothenburg, 2014.
- [2] M.H DeGroot. Reaching a consensus. *Journal of American Statistical Association*, 1974.
- [3] N. E Friedkin and E. Johnsen. Social influence and opinions. *Journal of Mathematical Sociology*, 15(3-4) :193–206, 1990.
- [4] R. Axelrod. The dissemination of culture. *The Journal of Conflict Resolution*, 1997.
- [5] M. Moussaid. *Fouloscopie : Ce que la foule dit de nous*. Humensis, 2019.
- [6] E. Yildiz, A. Ozdaglar, D. Acemoglu, A. Saberi, and A. Scaglione. Binary opinion dynamics with stubborn agents. *ACM Trans. Econ. Comp*, 2013.
- [7] A. Vendeville, B. Guedj, and S. Zhou. Forecasting elections results via the voter model with stubborn nodes. *Applied Network Science*, 6(1) :1–13, 2021.
- [8] A. Vendeville, B.Guedj, and S. Zhou. Voter model with stubborn agent on strongly connected social networks. *ArXiv*, 2020.
- [9] G. Deffuant, D. Neau, F. Amblard, and G. Weisbuch. Mixing beliefs among interacting agents. *Advances in Complex Systems*, (3) :11, 2001.
- [10] D. Neau. Révisions des croyances dans un système d'agents en interaction. 2000.
- [11] N. Lanchier and H. Li. Probability of consensus in the multivariate Deffuant model on finite connected graphs. *Electronic Communications in Probability*, 25(none) :1 – 12, 2020.
- [12] G. Weisbuch. Bounded confidence and social networks. *The European Physical Journal B*, 38(2) :339–343, 2004.
- [13] G. Deffuant, F. Amblard, and G. Weisbuch. How Can Extremism Prevail? a Study Based on the Relative Agreement Interaction Model. *Journal of Artificial Societies and Social Simulation*, 5(4) :1–1, 2002.
- [14] N. Lanchier and S. Scarlatos. Clustering and coexistence in the one-dimensional vectorial deffuant model. *Latin American journal of probability and mathematical statistics*, 2014.
- [15] O. Häggström and T. Hirscher. Further results on consensus formation in the deffuant model. *Electronic Journal of Probability*, 19 :1–26, 2014.
- [16] N. Lanchier and J. Schweinsberg. Consensus in the two-state axelrod model. *Stochastic Processes and their Applications*, 122(11) :3701–3717, 2012.
- [17] S. Milgram. The small world problem. *Psychology Today*, 1967.
- [18] J. Ugander, B. Karrer, L. Backstrom, and C. Marlow. The anatomy of the facebook social graph. *CoRR*, abs/1111.4503, 2011.
- [19] L. Backstrom, P. Boldi, M. Rosa, J. Ugander, and S. Vigna. Four degrees of separation. *CoRR*, abs/1111.4570, 2011.
- [20] A. Barabasi and R. Albert. Emergence of scaling in random networks. *Science*, 286(5439) :509–512, 1999.
- [21] M.E.J. Newman. Power laws, pareto distributions and zipf's law. *Contemporary Physics*, 46(5) :323–351, 2005.
- [22] D. Stauffer, A. Sousa, and C. Schulze. Discretized opinion dynamics of the deffuant model on scale-free networks. *J. Artif. Soc. Soc. Simul.*, 7, 2004.
- [23] M. Bashari and M. Akbarzadeh. Controlling opinions in deffuant model by reconfiguring the network topology. *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, 544 :123462, 2020.