Formule sommatoire d'Euler–Maclaurin

Arnaud Girand

17 juin 2012

Référence :
- [Gou08] p. 301–302

Prérequis :
- une certaine prédisposition aux calculs crades [1].

Proposition 1 (Euler–Maclaurin)
Soient $m, n \in \mathbb{Z}^2$ tels que $m < n$.
Soit $f \in \mathcal{C}^r([m,n], \mathbb{C})$ $(r \geq 1)$.
Alors :

$$\sum_{k=m}^{n} f(k) = \int_m^n f(t)dt + \frac{1}{2}(f(m) + f(n)) + \sum_{k=2}^{r} \frac{b_k}{k!}(f^{(k-1)}(n) - f^{(k-1)}(m)) + R_r \tag{1}$$

Où :

$$R_r := \frac{(-1)^{r+1}}{r!} \int_m^n \tilde{B_r}(t)dtf^{(r)}(t)dt$$

Démonstration : On démontre (1) par récurrence sur $r \geq 1$.

- $r = 1$. Fixons $m \leq l \leq n-1$ et remarquons que $\tilde{B_1} = B_1$ sur $(0,1)$ donc $\tilde{B_1} = B_1(. - k)$ presque partout sur $[k, k+1]$ ergo :

$$\begin{aligned}
\int_k^{k+1} \tilde{B_1}(t)f'(t)dt &= \int_k^{k+1} B_1(t-k)f'(t)dt \\
&= \int_0^1 B_1(t)f'(t+k)dt \text{ via } t \mapsto t+k \\
&= \int_0^1 (t - \frac{1}{2})f'(t+k)dt \\
&= \frac{f(k+1)+f(k)}{2} - \int_0^1 f(t+k)dt \text{ par parties} \\
&= \frac{f(k+1)+f(k)}{2} - \int_k^{k+1} f(t)dt
\end{aligned}$$

  En sommant sur k on obtient :

$$\begin{aligned}
R_1 &= \sum_{k=m}^{n-1} \frac{f(k+1)+f(k)}{2} - \int_m^n f(t)dt \\
&= \sum_{k=m}^{n} f(k) - \frac{1}{2}(f(m)+f(n)) - \int_m^n f(t)dt
\end{aligned}$$

  D'où le résultat.

- Supposons la propriété vraie au rang $r-1 \geq 1$. Une fois n'est pas coutume, immobilisons *manu militari* un entier $m \leq k \leq n-1$. Alors, en suivant le même procédé que ci–avant [2] :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(r-1)!}\int_k^{k+1} \tilde{B_{r-1}}(t)f^{(r-1)}(t) &= \frac{1}{r!}[B_r(t)f^{(r-1)}(t+k)]_0^1 - \frac{1}{r!}\int_k^{k+1} \tilde{B_r}(t)f^{(r)}(t)dt \\
&= \frac{b_r}{r!}(f^{(r-1)}(k+1) - f^{(r-1)}(k)) - \frac{1}{r!}\int_k^{k+1} \tilde{B_r}(t)f^{(r)}(t)dt
\end{aligned}$$

1. Si vous aimez les exposants en pagaille, c'est un plus.
2. Changement de variable puis intégration par parties puis re–changement de variable, le tout en remarquant que $\tilde{B_r} = B_r$ presque partout sur $[0,1]$.

On somme sur k puis on multiplie par $(-1)^r$, obtenant :

$$R_{r-1} = (-1)^r \frac{b_r}{r!}(f^{(r-1)}(n) - f^{(r-1)}(m)) + R_r$$

Or, si r est pair $(-1)^r b_r = b_r$ et si r est impair c'est également vrai car $b_r = 0$ (vu que $r \geq 2$). Donc, par hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=m}^{n} f(k) &= \int_m^n f(t)dt + \frac{1}{2}(f(m)+f(n)) + \sum_{k=2}^{r-1} \frac{b_k}{k!}(f^{(k-1)}(n) - f^{(k-1)}(m)) + R_{r-1} \\
&= \int_m^n f(t)dt + \frac{1}{2}(f(m)+f(n)) + \sum_{k=2}^{r-1} \frac{b_k}{k!}(f^{(k-1)}(n) - f^{(k-1)}(m)) + \frac{b_r}{r!}(f^{(r-1)}(n) - f^{(r-1)}(m)) + R_r \\
&= \int_m^n f(t)dt + \frac{1}{2}(f(m)+f(n)) + \sum_{k=2}^{r} \frac{b_k}{k!}(f^{(k-1)}(n) - f^{(k-1)}(m)) + R_r
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

Détails supplémentaires :

- *Nombres de Bernoulli ([Gou08], p. 299).* On considère l'application suivante, définie sur $\mathbb{C}$:

$$f : z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)!}$$

Alors, pour tout $z \neq 0$ on a $f(z) = \frac{e^z - 1}{z}$ et $f(0) = 1 \neq 0$ donc la fonction $\frac{1}{f}$ est développable en série entière sur un voisinage de 0, i.e il existe $r > 0$ et une suite de nombres complexes $(b_n)_n$ tels que :

$$\forall z \in \mathbb{C}^* \text{ tel que } |z| < r, \ \frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} z^n$$

Les complexes b_n sont appelés *nombres de Bernoulli*. On en déduit par produit de Cauchy que pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ tel que $|z| < r$ et tout $x \in \mathbb{R}$ il existe une suite $(B_n(x))_n$ de nombres complexes tels que :

$$\frac{ze^{zx}}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} z^n$$

Les polynômes $B_n \in \mathbb{C}[X]$ sont appelés *polynômes de Bernoulli*. On peut alors montrer les propriétés suivantes :

* si n est impair supérieur à 2 alors $b_n = 0$;
* $\forall n \geq 2$, $B_n(0) = B_n(1)$;
* on peut donc construire pour tout $n \geq 2$ une fonction $\tilde{B_n}$ continue 1–périodique sur $\mathbb{R}$ telle que $B_n = \tilde{B_n}$ sur $[0, 1)$;
* pour $n \geq 2$ on a $B'_n = nB_{n-1}$, ce qui permet de calculer les polynômes (et les nombres) de Bernoulli par récurrence :

i	B_n	b_n
0	1	1
1	$X - 1/2$	$-1/2$
2	$X^2 - X + 1/6$	$1/6$
3	$X^3 - (3/2)X^2 + (1/2)X$	0
4	$X^4 - 2X^3 + X^2 - 1/30$	$-1/30$

- En fait on peut définir les polynômes de Bernoulli comme l'unique suite de polynôme vérifiant $B_0 = 1$, $B'_n = nB_{n-1}$ et $\int_0^1 B_n = 0$, puis poser $b_n := B_n(0)$.

Références

[Gou08] Xavier Gourdon. *Analyse (2e édition).* Ellipses, 2008.