Équation de Bessel

Grégory Boil Tristan Haugomat

Année 2013-2014

On s'intéresse à l'équation de Bessel

$$xy'' + y' + xy = 0 \tag{1}$$

On se propose de montrer le théorème

Théorème. *L'ensemble des solutions $\mathcal{C}^2$ de (1) au voisinage de 0 est l'espace vectoriel engendré par la fonction analytique*

$$J_0(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{4^n(n!)^2} x^{2n} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sin\theta)d\theta.$$

De plus toute solution de (1) sur un intervalle de la forme $]-a,0[$ ou $]0,a[$ avec $a>0$ et linéairement indépendante de J_0 n'est pas bornée en 0.

Solutions analytiques au voisinage de 0

Soit $f = \sum_{n\geq 0} a_n x^n \in \mathbb{R}[[X]]$ une série formelle sur $\mathbb{R}$ ($a_n := 0$ pour $n < 0$), alors f est solution de (1) si et seulement si

$$\begin{aligned} 0 &= xf'' + f' + fy = \sum_{n\geq 0} n(n+1)a_{n+1}x^n + \sum_{n\geq 0}(n+1)a_{n+1}x^n + \sum_{n\geq 0} a_{n-1}x^n \\ &= \sum_{n\geq 0} \left((n+1)^2 a_{n+1} + a_{n-1}\right) x^n. \end{aligned}$$

Ainsi f est solution de (1) si et seulement si

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_{n+2} = -\dfrac{a_n}{(n+2)^2} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

Et l'ensemble des séries formelles solutions de (1) est l'espace vectoriel engendré par

$$J_0 := \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{4^n(n!)^2} x^{2n}.$$

La solution J_0 a un rayon de convergence infini, ainsi ce sont aussi les solutions analytiques de (1) au voisinage de 0, en effet

$$\frac{(-1)^{n+1}}{4^{n+1}((n+1)!)^2} \times \frac{4^n (n!)^2}{(-1)^n} = \frac{-1}{4(n+1)^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

De plus elles sont définie sur tout $\mathbb{R}$.

Études des autres solutions en 0^+ et 0^-

Soit f une solution de (1) définie sur un intervalle de la forme $]0, a[$ $(a > 0)$, linéairement indépendante de J_0. On a alors l'équation matricielle sur $]0, a[$: $Y' = AY$ avec

$$Y := \begin{pmatrix} J_0 & f \\ J_0' & f' \end{pmatrix}, \quad A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\frac{1}{x} \end{pmatrix}.$$

On regarde alors l'équation vérifié par le wronskien $w := \det(Y)$: en utilisant que pour la norme de Hilbert-Schmidt $\nabla \det = \mathrm{com}$ et que $M(\mathrm{com}(M))^T = \det(M)$ pour toute matrice M, on a :

$$\begin{aligned} w' &= (\det(Y))' = \mathrm{D}\det(Y)Y' = \mathrm{tr}\left(Y'(\mathrm{com}(Y))^T\right) = \mathrm{tr}\left(AY(\mathrm{com}(Y))^T\right) \\ &= \mathrm{tr}\left(\det(Y)A\right) = \mathrm{tr}(A)w = -\frac{1}{x}w. \end{aligned}$$

Ainsi $w(x) = \frac{\lambda}{x}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$ car f est indépendante de J_0. On a donc

$$\frac{\lambda}{x} = w(x) = J_0(x)f'(x) - J_0'(x)f(x).$$

Supposons f est borné, puisque $J_0(0) = 1$ et $J_0'(0) = 0$ on a $f' \sim_{0^+} \frac{\lambda}{x}$. Puisque $\frac{\lambda}{x}$ est d'intégrale divergente en 0^+ et est de signe constant, on en déduit que

$$f(x) = f(1) + \int_1^x f'(t)dt \sim_{0^+} \int_1^x \frac{\lambda}{t} dt \sim_{0^+} \lambda \ln(x).$$

Ceci est contradictoire, donc f n'est pas borné au voisinage de 0^+. Pour obtenir le résultat en 0^- on observe que si f est solution de (1) en 0^-, alors $f(-x)$ est solution en 0^+ et que J_0 est paire.

Une autre expression pour J_0

Soit

$$f(x) := \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin\theta) d\theta,$$

Par dérivation sous l'intégrale (les dérivés sont bornés), f est $\mathcal{C}^2$ et

$$\begin{aligned} xf''(x) + f'(x) + xf(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left[-x\sin^2\theta\cos(x\sin\theta) - \sin\theta\sin(x\sin\theta) + x\cos(x\sin\theta)\right] d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left[x\cos^2\theta\cos(x\sin\theta) - \sin\theta\sin(x\sin\theta)\right] d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\cos\theta\sin(x\sin\theta)\right]_{\theta=0}^\pi = 0 \end{aligned}$$

Ainsi f est solution de (1) sur $\mathbb{R}$, ainsi par ce qui précède f est colinéaire à J_0, enfin puisque $J_0(0) = f(0) = 1$ on en déduit

$$J_0(x) = f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin\theta) d\theta.$$

Références

[1] Serge Francinou, Hervé Gianella, Serge Nicolas, *Oraux X-ENS, Analyse 4*, Cassini, 2012.