Le folium de Descartes

2012-2013

Référence : François Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation (3e édition)*, Cassini, 2009, p.237.

Soit $f : (x, y) \mapsto x^3 + y^3 - 3xy$.
Soit $C := f^{-1}(0)$.
C est appelé folium de Descartes, le but de ce développement est de le décrire.

– Commençons par définir, dans l'équation de C, y comme fonction implicite de x, lorsque cela est possible.
  f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Le théorème des fonctions implicites lui est applicable au voisinage de (a, b) si :

$$f(a, b) = 0 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 3(b^2 - a) \neq 0$$

  Il existe dans ce cas un voisinage V de a, un voisinage W de b et une fonction $\varphi : V \to W$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ tels que :

$$(x \in V, y \in W \text{ et } (x, y) \in C) \iff (x \in V \text{ et } y = \varphi(x))$$

  La tangente à C au point (a, b) a pour équation :

$$y - b = \varphi'(a)(x - a)$$

  Pour $x \in V$, on a $f(x, \varphi(x)) = 0$ donc :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \varphi'(x)\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$$

  d'où :

$$\varphi'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)}$$

  i.e.

$$\varphi'(x) = -\frac{x^2 - y}{y^2 - x}$$

  La tangente à C au point (a, b) a donc pour équation :

$$(a^2 - b)(x - a) + (b^2 - a)(y - b) = 0$$

– Il y a deux couples (a, b) tels que $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$: $(a, b) = (0, 0)$ et $(a, b) = (2^{2/3}, 2^{1/3}) = A$. Au point A, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 3(a^2 - b) = 3 \cdot 2^{1/3} \neq 0$$

On peut donc exprimer x comme fonction implicite de y au voisinage de ce point et puisque $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$, on a une tangente verticale en A.
À l'origine on a par contre $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0$ donc le théorème des fonctions implicites n'est pas applicable directement.

– Donnons maintenant une représentation paramétrique de C. Pour cela, on étudie l'intersection de C avec la droite $y = tx$:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 - 3xy = 0 \\ y = tx \end{cases}$$

i.e.

$$\begin{cases} x^2((1 + t^3)x - 3t) = 0 \\ y = tx \end{cases}$$

La première équation en x a 0 comme racine double, ce qui donne le point $(x, y) = (0, 0)$, et une troisième racine, si $t \neq -1$, qui donne le point :

$$(x, y) = \left(\frac{3t}{1 + t^3}, \frac{3t^2}{1 + t^3} \right)$$

– Cette équation paramétrique nous permet d'établir le tableau de variation suivant :

t	$-\infty$			-1			0		$2^{-1/3}$		$2^{1/3}$		$+\infty$
x	0	$\nearrow$	$+\infty$	$\|\|$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$2^{2/3}$	$\searrow$	$2^{1/3}$	$\searrow$	0
y	0	$\searrow$	$-\infty$	$\|\|$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$2^{1/3}$	$\nearrow$	$2^{2/3}$	$\searrow$	0

Il y a donc deux passages par l'origine : l'un pour $t = 0$, avec tangente horizontale car $y/x = t$ tend vers 0, et l'autre déduit du premier par symétrie par rapport à la première bissectrice (car $f(a, b) = f(b, a)$), avec tangente verticale (correspondant ici à $t \to \pm\infty$).
Étude de la branche infinie en $t \to -1$: $y/x = t$ tend vers -1 donc la direction asymptotique est celle de la droite $y = -x$. De plus,

$$y - (-1)x = \frac{3t^2 + 3t}{1 + t^3} = \frac{3t}{1 - t + t^2} \to -1$$

donc $x + y + 1 \to 0$ pour $t \to -1$ et la distance euclidienne du point (x, y) à la droite d'équation $ax + by + c = 0$ est $|ax + by + c|/\sqrt{a^2 + b^2}$, donc la droite d'équation $x + y + 1 = 0$ est asymptote à C.

On a enfin :

$$x + y + 1 = \frac{(1+t)^3}{1+t^3} = \frac{(1+t)^2}{1-t+t^2} > 0 \text{ pour } t \neq -1$$

donc C est au-dessus de l'asymptote.