Théorème des fonctions implicites

2012-2013

Référence : François Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation (3e édition)*, Cassini, 2009, p. 259.

Dans toute la suite, on note $B_r := B(0,r) \subset \mathbb{R}^n$ et $B_s := B(0,s) \subset \mathbb{R}^p$.

Théorème.
Soit U un voisinage ouvert de $(0,0)$ dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$.
Soit $f : (x,y) \mapsto f(x,y)$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ de U dans $\mathbb{R}^p$.
On suppose $f(0,0) = 0$ et $D_y f(0,0)$ inversible.
Alors il existe $r > 0, s > 0$ et un unique $\varphi : B_r \to B_s$ tels que :

$$(x \in B_r, y \in B_s, f(x,y) = 0) \iff (x \in B_r, y = \varphi(x))$$

De plus, φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur B_r.

Démonstration. On note $A := D_y f(0,0)$ et $F_x(y) := y - A^{-1} f(x,y)$. On a :

$$DF_x(y) = \mathrm{Id} - A^{-1} D_y f(x,y)$$

Donc $DF_0(0) = 0$ et $(x,y) \mapsto DF_x(y)$ est continue en x et y, donc, pour des certains $r > 0$ et $s > 0$, on a $\|DF_x(y)\| \leq \frac{1}{2}$ pour $x \in B_r, y \in B_s$.
On a :

$$F_x(y) = F_x(0) + (F_x(y) - F_x(0))$$

Donc par l'inégalité des accroissement finis, pour $x \in B_s, y \in B_r$, on a :

$$\|F_x(y)\| \leq \|F_x(0)\| + \frac{1}{2}\|y\|$$

et $x \mapsto F_x(0)$ est continue donc, quitte à diminuer r, on a :

$$\|F_x(y)\| < s$$

Donc $F_x(\overline{B_s}) \subset B_s$ pour $x \in B_r$.
$\overline{B_s}$ est complet donc, d'après le théorème du point fixe, il existe un unique $y \in \overline{B_s}$ tel que $F_x(y) = y$, *i.e.* $f(x,y) = 0$ et $y \in B_s$ car $F_x(y) = y$ et $F_x(\overline{B_s}) \subset B_s$.
Donc on a bien ce qu'on voulait en posant $\varphi(x) = y$.

Montrons que φ est de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $x, x_0 \in B_r$, on pose $y = \varphi(x), y_0 = \varphi(x_0)$, on a :

$$\begin{aligned} y - y_0 &= F_x(y) - F_{x_0}(y_0) \\ &= (F_x(y) - F_x(y_0)) + (F_x(y_0) - F_{x_0}(y_0)) \\ &= F_x(y) - F_x(y_0) - A^{-1}(f(x, y_0) - f(x_0, y_0)) \end{aligned}$$

On a :

$$\|F_x(y) - F_x(y_0)\| \leq \frac{1}{2}\|y - y_0\|$$

et :

$$\|f(x, y_0) - f(x_0, y_0)\| \leq M\|x - x_0\|$$

où $M = \max\limits_{\|x\| \leq r} \|D_x f(x, y_0)\|$, d'où :

$$\|y - y_0\| \leq 2M\|A^{-1}\|\|x - x_0\|$$

i.e.

$$\|\varphi(x) - \varphi(x_0)\| \leq C\|x - x_0\|$$

Donc φ est lipschitzienne donc continue sur B_r.
$\|DF_x(y)\| \leq \frac{1}{2}$ donc $\sum\limits_{k \geq 0} (DF_x(y))^k$ converge vers l'inverse de $\mathrm{Id} - DF_x(y)$, *i.e.* l'inverse de $A^{-1}D_y f(x, y)$, donc $D_y f(x, y)$ est inversible.
f est différentiable en (x_0, y_0) donc :

$$0 = f(x, y) - f(x_0, y_0) = D_x f(x_0, y_0).(x - x_0) + D_y f(x_0, y_0) + o(\|x - x_0\| + \|y - y_0\|)$$

De plus, φ est lipschitzienne donc $o(\|x - x_0\| + \|y - y_0\|) = o(\|x - x_0\|)$. D'où :

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) = -D_y f(x_0, y_0)^{-1} \circ D_x f(x_0, y_0).(x - x_0) + o(\|x - x_0\|)$$

$\square$