

Formule de Kac-Rice et zéros de processus stochastiques

PAR GEOFFREY DEPERLE ET LAURENT MONTAIGU

Résumé

Le but de cette lecture dirigée est de comprendre la formule de Kac-Rice, qui donne une expression du nombre moyen de zéros d'un processus stochastique (c'est à dire une fonction aléatoire) sur un intervalle. Nous étudierons la formule dans plusieurs cas particuliers dont celui des processus gaussiens stationnaires.

Table des matières

1	Processus stochastiques	1
1.1	Variable gaussienne	1
1.1.1	Variable aléatoire gaussienne	1
1.1.2	Vecteur gaussien	2
1.2	Processus stochastique	3
1.2.1	Définition	3
1.2.2	Processus gaussien	3
1.2.3	Théorème de Bochner et mesure spectrale	4
1.2.4	Exemples de processus gaussiens	5
2	Continuité et dérivabilité des processus stationnaires	6
2.1	Continuité et dérivabilité en norme \mathbb{L}^2	6
2.2	Propriétés de la dérivée	7
3	Formule de Kac-Rice pour les processus gaussiens stationnaires	7
3.1	Formule de Kac	8
3.2	Application aux processus stochastiques : Formule de Kac-Rice	10
4	Formule de Kac-Rice non stationnaire et exemples	12
4.1	Formule générale	12
4.2	Nombre de zéros de polynômes aléatoires	14
4.2.1	Polynômes de Kac	14

1 Processus stochastiques

1.1 Variable gaussienne

1.1.1 Variable aléatoire gaussienne

Proposition-Définition 1. Soit $m \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \mathbb{R}^{+*}$, la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{t-m}{\sigma})^2}$ définit une densité de probabilité. On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ lorsque X admet f pour densité.

Dans le cas particulier $m = 0$ et $\sigma = 1$, on dit que X suit une loi normale centrée réduite et admet pour densité : $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$

Définition 1. Soit X une variable aléatoire réelle. On définit la fonction caractéristique de X : $\phi_X : t \mapsto \mathbb{E}(e^{itX})$

Cette fonction intervient dans le théorème suivant :

Théorème 1.1 (Paul Lévy). Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une de variable aléatoire et X une variable aléatoire. La convergence en loi de X_n vers X est équivalente à la convergence simple de la suite de fonction ϕ_{X_n} vers ϕ_X :

$$X_n \Longrightarrow X \iff \forall t \in \mathbb{R}, \phi_{X_n}(t) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \phi_X(t)$$

Dans le cas gaussien, on a les résultats suivants :

- $\mathbb{E}(X) = m$
- $\text{Var}(X) = \sigma^2$
- $\forall t \in \mathbb{R}, \phi_X(t) = \exp(imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2})$

Si X suit une loi normale centrée réduite, on a alors $\forall t \in \mathbb{R}, \phi_X(t) = \exp(-\frac{t^2}{2})$

1.1.2 Vecteur gaussien

Définition 2. Soit $X = (X_1, \dots, X_n)$ un vecteur aléatoire. On dit que X est un vecteur gaussien lorsque pour tout vecteur $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, la variable aléatoire $\langle a, X \rangle = a_1 X_1 + \dots + a_n X_n$ est une variable aléatoire réelle gaussienne.

Définition 3. On définit de même pour les vecteurs aléatoires la fonction caractéristique $\phi_X : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, par $\forall t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n, \phi_X(t) = \mathbb{E}(e^{i\langle t, X \rangle}) = \phi_{\langle t, X \rangle}(1)$. La fonction caractéristique caractérise la loi du vecteur aléatoire (i.e. pour tous vecteurs aléatoires X, Y $X \sim Y \iff \phi_X = \phi_Y$).

Définition 4. Pour un vecteur aléatoire $X = (X_1, \dots, X_n)$, on définit l'espérance de X : $\mathbb{E}(X) = (\mathbb{E}(X_1), \dots, \mathbb{E}(X_n)) \in \mathbb{R}^n$ et on définit la matrice de covariance de X noté $\text{Cov}(X)$ par $\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, (\text{Cov}(X))_{(i,j)} = \text{Cov}(X_i, X_j)$

Exemple 1. Soit X, Y deux variables gaussiennes indépendantes, $s, t \in \mathbb{R}$. La matrice de covariance du couple $(X + Y, X - Y)$ est

$$\begin{pmatrix} \text{Cov}(X + Y, X + Y) & \text{Cov}(X + Y, X - Y) \\ \text{Cov}(X - Y, X + Y) & \text{Cov}(X - Y, X - Y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) & \text{Var}(X) - \text{Var}(Y) \\ \text{Var}(X) - \text{Var}(Y) & \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) \end{pmatrix}$$

Soit $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $X = (X_1, \dots, X_n)$ un vecteur gaussien, on a

$$\forall t \in \mathbb{R}, \phi_{\langle a, X \rangle}(t) = \exp\left(i\mathbb{E}(\langle a, X \rangle)t - \frac{\text{Var}(\langle a, X \rangle)t^2}{2}\right)$$

Avec

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\langle a, X \rangle) &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{E}(X_i) = \langle a, \mathbb{E}(X) \rangle \\ \text{Var}(\langle a, X \rangle) &= \text{Var}\left(\sum_{k=1}^n a_k X_k\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j \text{Cov}(X_i, X_j) = {}^t a \text{Cov}(X) a = \langle a, \text{Cov}(X) a \rangle \end{aligned}$$

Ainsi pour $t \in \mathbb{R}^n$,

$$\phi_X(t) = \phi_{\langle t, X \rangle}(1) = \exp\left(i\langle t, \mathbb{E}(X) \rangle - \frac{1}{2}\langle t, \text{Cov}(X) t \rangle\right)$$

Comme la fonction caractéristique caractérise la loi du vecteur gaussien, le vecteur gaussien est uniquement déterminé par son vecteur espérance et par sa matrice de covariance. On écrit alors $X \sim \mathcal{N}(\mathbb{E}(X), \text{Cov}(X))$

Remarque 1. Si les marginales X_1, \dots, X_n sont non dégénérés (i.e. d'écart-type non nul), alors pour tout $a \in \mathbb{R}^n, {}^t a \text{Cov}(X) a = \text{Var}(\langle a, X \rangle) > 0$ donc la matrice $\text{Cov}(X)$ est symétrique définie positive. Elle admet donc une unique racine carrée $\sqrt{\text{Cov}(X)}$.

Proposition 1. Soit $X \sim (m, K)$, alors $\sqrt{K}^{-1}(X - m) \sim \mathcal{N}(0, I_n)$

Cela permet de déterminer la densité d'un vecteur gaussien

Proposition 2. Soit $X \sim (m, K)$, la fonction de densité de X est $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(K)}} \exp(-\frac{1}{2}\langle K^{-1}(x - m), x - m \rangle)$

La covariance permet de caractériser l'indépendance de deux variables aléatoires gaussiennes. En effet :

Proposition 3. Soit (X, Y) un vecteur gaussien. X et Y sont indépendantes si et seulement si $\text{Cov}(X, Y) = 0$

Preuve :

Le sens direct est toujours vrai. Intéressons nous au sens réciproque. Supposons que $\text{Cov}(X, Y) = 0$. Montrons que X et Y sont indépendantes. Supposons sans perte de généralité que X et Y sont centrées. Il suffit de montrer que $\phi_{(X,Y)}(t_1, t_2) = \phi_X(t_1)\phi_Y(t_2)$ pour tout $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$. Or, comme $\text{Cov}(X, Y) = 0$, la matrice de covariance de (X, Y) est $\begin{pmatrix} \sigma_X^2 & 0 \\ 0 & \sigma_Y^2 \end{pmatrix}$. D'où $\phi_{(X,Y)}(t_1, t_2) = \exp(-\frac{1}{2}(t_1^2\sigma_X^2 + t_2^2\sigma_Y^2)) = \exp(-\frac{1}{2}t_1^2\sigma_X^2) \exp(-\frac{1}{2}t_2^2\sigma_Y^2) = \phi_X(t_1)\phi_Y(t_2)$. Ce qui prouve l'indépendance. \square

1.2 Processus stochastique

1.2.1 Définition

Définition 5. Soit T un ensemble quelconque (souvent $T = \mathbb{R}$ ou $T = \mathbb{R}^+$), un processus stochastique est une famille de variables aléatoires $(X_t)_{t \in T}$ indexée par T .

Définition 6. Soit $X = (X_t)_{t \in T}$ et $Y = (Y_t)_{t \in T}$ deux processus stochastiques, X et Y sont dits

- **équivalent** si toutes lois finies dimensionnelles sont égales i.e. $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t_1, \dots, t_n, (X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \sim (Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n})$
- **fortement équivalent** si $\forall t \in T, \mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1$
- **indistinguable** si $\mathbb{P}(\bigcap_{t \in T} [X_t = Y_t]) = 1$

On obtient alors indistinguable \implies fortement équivalent \implies équivalent.

Étant donné un processus stochastique, on peut trouver sous certaines hypothèses une version de X (i.e. un autre processus stochastique qui lui est fortement équivalent) dont les trajectoires sont continues :

Théorème 1.2 (Kolmogorov). Soit X un processus stochastique tel qu'il existe $a, b, c > 0$ tel que

$$\forall s, t \in T, \mathbb{E}[|X_t - X_s|^a] \leq c|t - s|^{1+b}$$

Alors il existe une version continue de X dont les trajectoires sont γ -hölérienne pour tout $\gamma < \frac{b}{a}$

Définition 7. On dit qu'un processus stochastique X est **stationnaire** si $\forall t_1, \dots, t_n \in T, h > 0 (X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \sim (X_{t_1+h}, \dots, X_{t_n+h})$

Ainsi, si X est stationnaire, alors en particulier les $X(t)$ suivent la même loi pour tout $t \in T$. En particulier, les fonctions $t \mapsto \mathbb{E}(X(t))$ et $t \mapsto \text{Var}(X(t))$ sont constantes.

1.2.2 Processus gaussien

Un cas particulier des processus stochastiques sont les processus gaussiens dont toutes les lois finies dimensionnelles sont des vecteurs gaussiens.

Comme le vecteur espérance et la matrice de covariance caractérisent un vecteur gaussien et que les lois finies dimensionnelles caractérisent le processus. La fonction espérance définie sur T par $t \mapsto \mathbb{E}(X_t)$ et covariance définie sur T^2 par $(t, s) \mapsto \text{Cov}(X_t, X_s)$ caractérisent le processus gaussien.

Un corollaire du théorème de Kolmogorov donne un critère de régularité d'un processus gaussien :

Théorème 1.3 (de régularité). Soit X un processus gaussien de covariance K tel qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall s, t \in T, K(t, t) + K(s, s) - 2K(s, t) \leq c|t - s|^\alpha$$

Il existe une version continue \tilde{X} de X dont les trajectoires sont presque sûrement γ -höldérienne pour $\gamma < \frac{\alpha}{2}$

Preuve :

La preuve du théorème de régularité s'appuie sur le lemme suivant

Lemme 1. Soit $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$. On a $\mathbb{E}(X^{2m}) = \frac{(2m)!}{2^m m!} \text{Var}(X)^m$

Ainsi, on a pour $s, t \in T$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|X_s - X_t|^{2m}) &= \frac{(2m)!}{2^m m!} \text{Var}(X_s - X_t)^m \\ &= c \frac{(2m)!}{2^m m!} |t - s|^{m\alpha} \quad \text{par hypothèse} \end{aligned}$$

Il suffit alors de poser $1 + b = m\alpha$ et $a = 2m$ pour pouvoir conclure avec le théorème de régularité de Kolmogorov.

On en déduit de plus que les trajectoires de X sont γ -höldérienne pour $\gamma < \frac{m\alpha - 1}{2m}$ pour tout $m \in \mathbb{N}$, d'où en passant à la limite lorsque $m \rightarrow +\infty$, les trajectoires de X sont γ -höldérienne pour $\gamma < \frac{\alpha}{2}$ \square

Exemple 2. Dans le cas du mouvement brownien, qui est un processus gaussien centré défini par la fonction de covariance $K(s, t) = \min(s, t)$

On a

$$\begin{aligned} \forall s, t \in T, K(t, t) + K(s, s) - 2K(s, t) &= t + s - 2 \min(s, t) \\ &= |t - s| \end{aligned}$$

Par théorème de régularité, il existe une version continue \tilde{f} de f dont les trajectoires sont presque-sûrement γ -höldérienne pour $\gamma < \frac{1}{2}$

1.2.3 Théorème de Bochner et mesure spectrale

Définition 8. Soit $\phi : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$. ϕ est définie positive si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n, \sum_{i, j=1}^n \lambda_i \bar{\lambda}_j \phi(x_i - x_j) \geq 0$$

Cette notion intervient dans le théorème suivant :

Théorème 1.4 (Bochner). Soit $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ définie positive, continue à l'origine, vérifiant $\phi(0) = 1$. Alors il existe une mesure de probabilité μ tel que ϕ soit la fonction caractéristique de μ i.e.

$$\forall t \in \mathbb{R}^n, \phi(t) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle t, x \rangle} \mu(dx)$$

Dans le cas des processus gaussiens, on peut noter qu'un processus gaussien est stationnaire si et seulement si son espérance est constante et sa covariance K vérifie $\forall t, s \in T, K(s, t) = K(s - t, 0)$. On peut donc définir la

fonction d'une seule variable $K = K(\cdot, 0)$ qui est une fonction définie positive par propriété de la covariance, continue et vérifiant $K(0) = \text{Var}(X_t)$ qui est constant.

Ainsi, en appliquant le théorème de Bochner à $K = \frac{K}{K(0)}$ et en normalisant, on obtient l'existence d'une mesure finie μ appelée **mesure spectrale** de X vérifiant l'expression

$$\forall t \in T, K(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \mu(dx)$$

Avec $K(0) = \mu(\mathbb{R})$

Par symétrie et stationnarité, on a $\forall t \in \mathbb{R}, K(t, 0) = K(-t, 0)$: la fonction de covariance est paire donc par changement de variable, on a $K(t) = \int_{\mathbb{R}} \cos(tx) \mu(dx)$.

1.2.4 Exemples de processus gaussiens

Avec différentes fonctions d'espérance et de covariance on trouve différents processus gaussiens :

- Le **mouvement brownien** défini avec $\mathbb{E}(W_t) = 0$ et $K(s, t) = \min(s, t)$
- Le **pont brownien** défini avec $\mathbb{E}(W_t) = 0$ et $K(s, t) = \min(s, t) - st$
- Le **processus d'Ornstein-Uhlenbeck** défini avec la fonction de covariance $K(s, t) = e^{-\frac{|t-s|}{2}}$
- Le **mouvement brownien fractionnaire** de paramètre $H \in (0, 1)$ défini avec $K(s, t) = \frac{1}{2}(|s|^{2H} + |t|^{2H} - |s - t|^{2H})$.

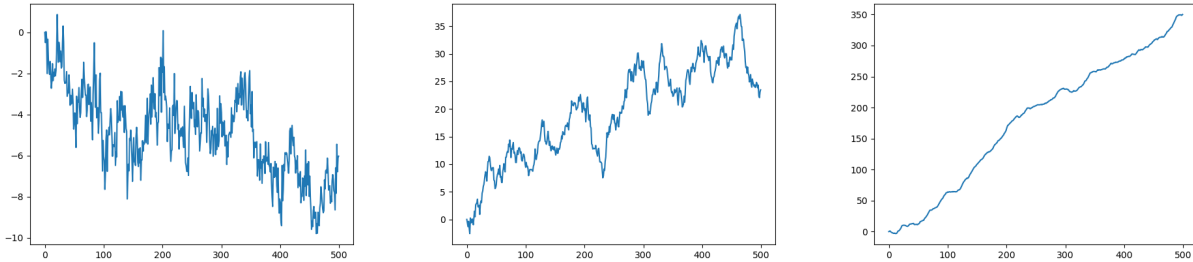


FIGURE 1 – Simulation de trajectoire d'un mouvement brownien fractionnaire avec $H = 0.2$, $H = 0.5$ et $H = 0.9$

- Le processus stochastique $X(t)$ défini par $\mathbb{E}(X(t)) = 0$ et $K(s, t) = \text{sinc}(s - t)$ est un processus stationnaire (appelé processus de Paley-Weiner) de fonction de covariance $K(t) = \text{sinc}(t)$.

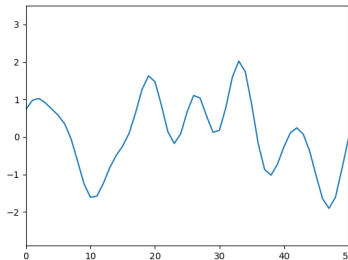


FIGURE 2 – Simulation de trajectoire d'un processus de Paley-Weiner sur $[0, 10]$

```

import numpy as np
from math import *
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib import cm

def covariance(H,n) :
    R = np.zeros((n,n))
    for s in range(0,n) :
        for t in range(0,n) :
            R[t,s] = ((s**(2*H) + t**(2*H) - abs(t-s)**(2*H))/2)
    return R

def racine_carre(A) :
    n = len(A)
    a = np.linalg.eig(A)
    vp = a[0]
    P = a[1]
    diag = np.diag(vp)
    r_diag = np.sqrt(diag)
    return P.dot(r_diag.dot(np.linalg.inv(P)))

def mbf(H,n) :
    v = np.random.normal(0, 1, n)
    K = covariance(H,n)
    S = racine_carre(K)
    process = S.dot(v)
    plt.plot(process)
    plt.show()

```

FIGURE 3 – Code python permettant de simuler le mouvement brownien fractionnaire

2 Continuité et dérivabilité des processus stationnaires

2.1 Continuité et dérivabilité en norme \mathbb{L}^2

Soit $(x(t))_{t \in \mathbb{R}}$ un processus gaussien stationnaire de fonction de covariance K de mesure spectrale μ . Nous étudierons dans cette section la continuité et la dérivabilité des processus stochastiques dans la topologie définie par la norme \mathbb{L}^2 .

Définition 9. *On dit que x est*

- continue en $t \in \mathbb{R}$, (en norme \mathbb{L}^2) si $x(t+h) - x(t) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$
- dérivable en $t \in \mathbb{R}$, (en norme \mathbb{L}^2) si $\frac{x(t+h) - x(t)}{h}$ converge lorsque $h \rightarrow 0$. Sa limite est notée alors $x'(t)$

Dans le cas d'un processus gaussien stationnaire, la continuité (resp. la dérivabilité) en tout point est équivalente à la continuité (resp. la dérivabilité) en 0.

Nous pouvons alors écrire le taux d'accroissement en 0 de x en fonction de la fonction covariance :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \left(\left| \frac{x(h) - x(0)}{h} \right|^2 \right) &= \frac{1}{h^2} (\mathbb{E}((x(h))^2) + \mathbb{E}((x(0))^2) - 2\text{Cov}(x(h), x(0))) \\
 &= \frac{2}{h^2} (K(0) - K(h))
 \end{aligned}$$

Ainsi, x est dérivable en tout $t \in \mathbb{R}$ si et seulement si $\frac{2}{h^2} (K(0) - K(h)) < +\infty$

En utilisant la mesure spectrale, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{2}{h^2}(K(0) - K(h)) &= \frac{2}{h^2} \int_{\mathbb{R}} (1 - e^{i\omega h}) \mu(d\omega) \\
&= \frac{2}{h^2} \int_{\mathbb{R}} (1 - \cos(i\omega h)) \mu(d\omega) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \omega^2 \frac{1 - \cos(i\omega h)}{(\frac{\omega^2 h^2}{2})} \mu(d\omega)
\end{aligned}$$

Or, par inégalité de Taylor-Lagrange, on a $0 \leq \left| \frac{1 - \cos(i\omega h)}{(\frac{\omega^2 h^2}{2})} \right| \leq 1$ Ainsi, par théorème de convergence de dominée, si $\int_{\mathbb{R}} \omega^2 \mu(d\omega) < +\infty$, alors $K''(0) < +\infty$ et $K''(0) = \int_{\mathbb{R}} \omega^2 \mu(d\omega)$

A partir de l'égalité $K(t) = \int_{\mathbb{R}} \cos(\omega t) \mu(d\omega)$, si on suppose K deux fois dérivable, on a par convergence dominée (comme μ est une mesure finie et \cos est borné par 1 : $K''(t) = - \int_{\mathbb{R}} \omega^2 \cos(\omega t) \mu(d\omega)$ d'où $-K''(0) = \int_{\mathbb{R}} \omega^2 \mu(d\omega)$ Plus généralement, on a l'égalité suivante :

Théorème 2.1. Soit X un processus stochastique stationnaire. X est dérivable (au sens \mathbb{L}^2) si et seulement si sa fonction de covariance K est deux fois dérivable au voisinage de 0. Dans ce cas, en notant $K_{X'}$ la fonction de covariance de X' , on a l'égalité :

$$\forall t \in \mathbb{R}, K_{X'}(t) = -K''(t)$$

On notera par la suite $\lambda_2 = -K''(0)$. On a donc $\lambda_2 = \int_{\mathbb{R}} \omega^2 \mu(d\omega)$

2.2 Propriétés de la dérivée

Proposition 4. Soit $X(t)$ un processus stochastique stationnaire dérivable. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X(t)$ et $X'(t)$ sont indépendants.

Preuve :

Soit $t \in \mathbb{R}$, $h > 0$,

$$\mathbb{E} \left[X(t) \frac{X(t+h) - X(t)}{h} \right] = \frac{1}{h} (\mathbb{E}[X(t)X(t+h)] - \mathbb{E}[X(t)X(t)]) = \frac{1}{h} (K(h) - K(0)) \rightarrow K'(0) = 0$$

Comme $X(t)$ et $X'(t)$ sont gaussiens de covariance nuls, alors $X(t)$ et $X'(t)$ sont indépendants. □

Dans le cas stationnaire, le processus dérivée est également stationnaire.

Proposition 5. Soit $X(t)$ un processus gaussien stationnaire dérivable. Le processus $X'(t)$ est un processus gaussien stationnaire.

3 Formule de Kac-Rice pour les processus gaussiens stationnaires

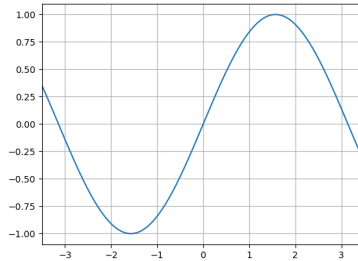
Nous commençons par nous intéresser par la formule de Kac, qui est une formule permettant de dénombrer qui permet, sous certaines hypothèses de dénombrer le nombre de zéros d'une fonction (déterministe).

3.1 Formule de Kac

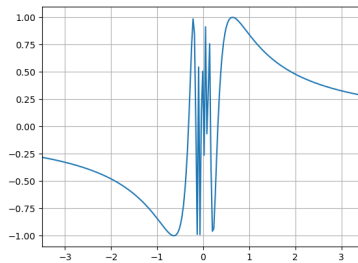
Dans toute la suite on note $a < b$ deux réels. Pour une fonction f , on notera $N(f, [a, b])$ le nombre de zéros de f sur $[a, b]$: $N(f, [a, b]) = \text{Card}\{f^{-1}(\{0\}) \cap [a, b]\}$

Exemple 3.

— Pour $f : x \mapsto \sin(x)$ sur $[-\pi, \pi]$, on a $N(f, [-\pi, \pi]) = 3$



— Pour $f : x \mapsto \sin(\frac{1}{x})$ sur $]0, 1]$, on a $N(f, [-\pi, \pi]) = +\infty$



La formule de Kac permet déterminer ce nombre de zéros :

Théorème 3.1 (Formule de Kac). Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ vérifiant :

1. f est de classe C^1 sur $]a, b[$
2. $f(a) \neq 0, f(b) \neq 0$
3. f et f' ne s'annulent pas simultanément

Alors $N(f, [a, b])$ vérifie

$$N(f, [a, b]) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_a^b \mathbf{1}_{[-\varepsilon, \varepsilon]}(f(t)) |f'(t)| dt$$

Remarque 2. Plus particulièrement, il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $N(f, [a, b]) = \frac{1}{2\varepsilon} \int_a^b \mathbf{1}_{[-\varepsilon, \varepsilon]}(f(t)) |f'(t)| dt$

Preuve :

Étape 1 : On étudie le cas particulier où f est strictement monotone sur $[a, b]$

Quitte à considérer $-f$, supposons f strictement croissante. Si f est strictement monotone alors f est une bijection de classe C^1 de $[a, b]$ vers $[f(a), f(b)]$

Pour $\varepsilon > 0$, par changement de variable, on a

$$\frac{1}{2\varepsilon} \int_a^b \mathbf{1}_{[-\varepsilon, \varepsilon]}(f(t)) |f'(t)| dt = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{f(a)}^{f(b)} \mathbf{1}_{[-\varepsilon, \varepsilon]}(u) du$$

Si f s'annule sur $[a, b]$, alors $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$ car f ne s'annule pas en a ni en b . On peut donc choisir $\varepsilon > 0$ tel que $f(a) < -\varepsilon < 0 < \varepsilon < f(b)$. On a donc $\frac{1}{2\varepsilon} \int_{f(a)}^{f(b)} \mathbb{1}_{[-\varepsilon, \varepsilon]}(u) du = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} du = 1$.

Si f ne s'annule pas sur $[a, b]$, alors par théorème des valeurs intermédiaires $f(a)$ et $f(b)$ sont de même signe. En prenant ε tel que $\varepsilon < \min(|f(a)|, |f(b)|)$, on a $\frac{1}{2\varepsilon} \int_{f(a)}^{f(b)} \mathbb{1}_{[-\varepsilon, \varepsilon]}(u) du = 0$.

Comme f est injective, f ne s'annule qu'au plus une fois sur $[a, b]$ donc la formule est vraie pour f monotone.

Étape 2 : Passons au cas général

L'idée est d'utiliser le cas précédent au voisinage de chaque point d'annulation de f . Pour cela, on utilisera le lemme suivant :

Lemme 2. *Soit $f \in C^1([a, b])$ tel que f et f' ne s'annulent pas simultanément. Il existe $r > 0$ tel que pour tout point d'annulation x de f , $f|_{]x-r, x+r[}$ est monotone. De plus, le nombre de zéros de f est fini.*

Preuve :

Soit f une fonction vérifiant les hypothèses. Soit x un zéro de f : par la formule de Taylor-Young, il existe une fonction $\epsilon(x)$ qui tend vers 0 en 0 tel que $f(x+h) = h(f'(x) + \epsilon(h))$. Posons alors r_x tel que $\forall h < r_x, |\epsilon(h)| < \frac{|f'(x)|}{2}$ et $B(x, \frac{r_x}{2})$ la boule de centre x de rayon $\frac{r_x}{2}$:
 $\forall h_1 < h_2 \in B(x, \frac{r_x}{2}), f(h_2) - f(h_1) = (h_2 - h_1)(f'(x) + \epsilon(h_2 - h_1))$ avec $|h_2 - h_1| < r_x$ d'où $f'(x) + \epsilon(h_2 - h_1)$ est de signe constant (du même signe que $f'(x)$ donc f est strictement monotone sur $B(x, \frac{r_x}{2})$.

On a $f^{-1}(\{0\}) \subset \bigcup_{x \in f^{-1}(\{0\})} B(x, \frac{r_x}{2})$ Par compacité de $f^{-1}(\{0\})$ (qui est l'image réciproque du compact 0 par f continue), par propriété de Borel-Lebesgue : il existe x_1, \dots, x_n tel que $f^{-1}(\{0\}) \subset \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \frac{r_{x_i}}{2})$. Posons alors $r = \min_{i=1, \dots, n} \frac{r_{x_i}}{2}$. On a d'après ce qui précède que pour tout x tel que $f(x) = 0$, $f|_{]x-r, x+r[}$ est monotone.

De plus, le nombre de zéros de f est finie et égal à n . En effet, soit x un zéro de f . Il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $x \in B(x_i, \frac{r_{x_i}}{2})$ sur lequel f est monotone donc s'annule qu'une seule fois. D'où $x = x_i$ \square

Revenons à la propriété,

D'après le lemme, f admet n zéros $x_1 < \dots < x_n$ et il existe $r > 0$ tel que f est monotone sur les $]x_i - r, x_i + r[$. Quitte à réduire r on peut choisir r tel que les $]x_i - r, x_i + r[$ sont disjoints et tel que $a < x_1 - r$ et $x_n + r < b$. Posons $A = \bigcup_{i=1}^n]x_i - r, x_i + r[$. On a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\varepsilon} \int_a^b \mathbb{1}_{[-\varepsilon, +\varepsilon]}(f(t)) |f'(t)| dt &= \frac{1}{2\varepsilon} \left[\int_{[a, b] \cap A} \mathbb{1}_{[-\varepsilon, +\varepsilon]}(f(t)) |f'(t)| dt + \int_{[a, b] \cap A^c} \mathbb{1}_{[-\varepsilon, +\varepsilon]}(f(t)) |f'(t)| dt \right] \\ &= \frac{1}{2\varepsilon} \left[\sum_{i=1}^n \int_{x_i - r}^{x_i + r} \mathbb{1}_{[-\varepsilon, +\varepsilon]}(f(t)) |f'(t)| dt + \int_{[a, b] \cap A^c} \mathbb{1}_{[-\varepsilon, +\varepsilon]}(f(t)) |f'(t)| dt \right] \end{aligned}$$

f ne s'annule pas sur A^c , par compacité de $[a, b] \cap A^c$ et continuité de $|f|$, $|f|$ admet un minimum non nul m sur $[a, b] \cap A^c$. Pour $\varepsilon < m$, on a donc $\int_{[a, b] \cap A^c} \mathbb{1}_{[-\varepsilon, +\varepsilon]}(f(t)) |f'(t)| dt = 0$. D'après le cas précédent on a donc

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_a^b \mathbb{1}_{[-\varepsilon, +\varepsilon]}(f(t)) |f'(t)| dt = n = N(f, [a, b])$$

\square

3.2 Application aux processus stochastiques : Formule de Kac-Rice

La formule de Kac-Rice consiste à appliquer la formule de Kac à un processus stochastique. Dans ce cas le nombre de zéro du processus stochastique définit une variable aléatoire dont la formule de Kac-Rice donne une expression de l'espérance.

Soit $x(t)$ un processus gaussien stationnaire, C^1 presque partout sur $[a, b]$ de dérivée x' . Comme $\mathbb{P}(x(t) = 0) = 0$, on a $x(t)$ ne s'annule pas en a ni en b avec probabilité 1. De même $\mathbb{P}(x(t) = 0 \cap x'(t) = 0) = \mathbb{P}(x(t) = 0)\mathbb{P}(x'(t) = 0) = 0$ par indépendance. Pour que les conditions de la formule de Kac soient vérifiées, il faut que la probabilité que pour tout t , $x(t)$ et $x'(t)$ s'annulent simultanément soit 1. Cette condition est obtenue grâce au lemme suivant :

Lemme 3 (de Bulinskaya). *Soit $x(t)$ un processus stochastique presque sûrement C^1 admettant pour densité $f_t(x)$ bornée pour $t \in [0, 1]$. Alors pour tout $u \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{t \in [0, 1] | x(t) = u \text{ et } x'(t) = 0\}$ est négligeable. De plus, x atteint u un nombre fini de fois le niveau u .*

Il s'agit alors de calculer $\mathbb{E} \left[\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_a^b \mathbb{1}_{[-\varepsilon, +\varepsilon]}(x(t)) |x'(t)| dt \right]$. Nous admettrons la légitimité de l'inversion de l'espérance et de la limite qui est un corollaire de la preuve du lemme de Bulinskaya. Ainsi, pour $\varepsilon > 0$, le théorème de Fubini-Tonelli donne

$$\mathbb{E} \left[\frac{1}{2\varepsilon} \int_a^b \mathbb{1}_{[-\varepsilon, +\varepsilon]}(x(t)) |x'(t)| dt \right] = \frac{1}{2\varepsilon} \int_a^b \mathbb{E} [\mathbb{1}_{[-\varepsilon, +\varepsilon]}(x(t)) |x'(t)|] dt$$

Comme $x(t)$ et $x'(t)$ sont indépendants, les variables aléatoires $\mathbb{1}_{[-\varepsilon, +\varepsilon]}(x(t))$ et $|x'(t)|$ sont indépendantes. D'où :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\frac{1}{2\varepsilon} \int_a^b \mathbb{1}_{[-\varepsilon, +\varepsilon]}(x(t)) |x'(t)| dt \right] &= \frac{1}{2\varepsilon} \int_a^b \mathbb{E} [\mathbb{1}_{[-\varepsilon, +\varepsilon]}(x(t))] \mathbb{E} [|x'(t)|] dt \\ &= \frac{1}{2\varepsilon} \int_a^b \mathbb{P}(x(t) \in [-\varepsilon, +\varepsilon]) \mathbb{E} [|x'(t)|] dt \\ &= \frac{1}{2\varepsilon} \int_a^b \mathbb{P}(x(0) \in [-\varepsilon, +\varepsilon]) \mathbb{E} [|x'(0)|] dt \quad \text{par stationnarité} \\ &= \frac{b-a}{2\varepsilon} \mathbb{P}(x(0) \in [-\varepsilon, +\varepsilon]) \mathbb{E} [|x'(0)|] \end{aligned}$$

Or,

$$\frac{1}{2\varepsilon} \mathbb{P}(x(0) \in [-\varepsilon, +\varepsilon]) = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda_0}} e^{-\frac{1}{2} \frac{t^2}{\lambda_0}} dt \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda_0}}$$

Et $\mathbb{E} [|x'(0)|] = \int_{\mathbb{R}} |t| f_{x'(0)}(t) dt$. Comme $x'(0)$ est une variable aléatoire gaussienne d'espérance nulle et de variance $K_{x'(0)} = -\lambda_2$. La densité $f_{x'(0)}$ vérifie $f_{x'(0)} = \frac{1}{\sqrt{-2\pi\lambda_2}} e^{+\frac{1}{2} \frac{t^2}{\lambda_0}}$. D'où

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [|x'(0)|] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda_2}} \int_{\mathbb{R}} |t| e^{-\frac{1}{2} \frac{t^2}{\lambda_2}} dt \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi\lambda_2}} \int_0^{+\infty} t e^{-\frac{1}{2} \frac{t^2}{\lambda_2}} dt \\ &= \frac{2\lambda_2}{\sqrt{2\pi\lambda_2}} \left[e^{-\frac{t^2}{2\lambda_2}} \right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{2\lambda_2}{\sqrt{2\pi\lambda_2}} = \frac{\sqrt{2\lambda_2}}{\sqrt{\pi}} \end{aligned}$$

Ainsi, on dispose de la formule de suivante :

Théorème 3.2 (Formule de Kac-Rice pour les processus gaussiens stationnaires). Soit $(x(t))$ un processus gaussien stationnaire deux fois dérivable presque partout sur $[a, b]$. Alors en notant D_0 le nombre de zéros du processus $x(t)$. On a

$$\mathbb{E}(D_0) = \frac{b-a}{\pi} \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_0}}$$

En utilisant la mesure spectrale μ de x , on obtient la formule suivante :

$$\mathbb{E}(D_0) = \frac{b-a}{\pi} \sqrt{\frac{\int_{\mathbb{R}} \omega^2 \mu(d\omega)}{\int_{\mathbb{R}} \mu(d\omega)}}$$

Exemple 4 (Application au nombre de zéros d'un polynôme trigonométrique aléatoire).

Soit $(a_k)_{k \geq 0}$ et $(b_k)_{k \geq 0}$ deux suites de variables aléatoires gaussiennes centrées réduites iid. Soit x_n le processus gaussien définie par $x_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)$ pour $t \in \mathbb{R}$.

On a pour $t, s \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} K(t, s) &= \mathbb{E} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k^2 \cos(kt) \cos(ks) + b_k^2 \sin(kt) \sin(ks) \right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(a_k^2) \cos(kt) \cos(ks) + \mathbb{E}(b_k^2) \sin(kt) \sin(ks) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos(kt) \cos(ks) + \sin(kt) \sin(ks) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos(k(t-s)) \end{aligned}$$

Le processus est donc stationnaire et vérifie $\lambda_0 = K(0) = 1$ et $\lambda_2 = K''(0) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$

La formule de Kac-Rice donne alors $\mathbb{E}[N(x_n, [0, 2\pi])] = \frac{2\pi}{\pi} \sqrt{\frac{(n+1)(2n+1)}{6}} \sim \frac{2}{\sqrt{3}} n$

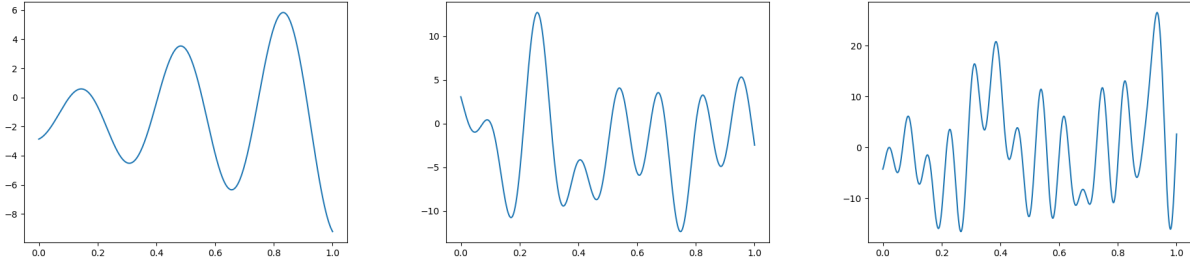


FIGURE 4 – Simulation de trajectoire x_n pour $n = 20$, $n = 50$ et $n = 100$. On trouve respectivement 6, 13 et 21 ce qui est proche de l'approximation donnée précédemment.

De même, il est possible de calculer l'espérance du nombre de fois où un processus stochastique atteint un niveau $u \in \mathbb{R}$. En effet, en considérant $f - u$ dans la formule de Rice, on a pour ε assez petit,

$$\text{Card}(f^{-1}(u) \cap [a, b]) = \frac{1}{2\varepsilon} \int_a^b \mathbf{1}_{[u-\varepsilon, u+\varepsilon]}(f(t)) |f'(t)| dt$$

. Ce qui en passant à l'espérance, donne comme précédemment,

$$\mathbb{E}(D_u) = (b-a) \frac{\sqrt{2\lambda_2}}{\sqrt{\pi}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \mathbb{P}(x(0) \in [u-\varepsilon, u+\varepsilon])$$

Avec

$$\frac{1}{2\varepsilon} \mathbb{P}(x(0) \in [u - \varepsilon, u + \varepsilon]) = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{u-\varepsilon}^{u+\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda_0}} e^{-\frac{1}{2} \frac{t^2}{\lambda_0}} dt \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda_0}} e^{-\frac{1}{2} \frac{u^2}{\lambda_0}}$$

Ce qui donne la proposition suivante :

Théorème 3.3. Soit $(x(t))$ un processus gaussien stationnaire deux fois dérivable et $u \in \mathbb{R}$ presque partout sur $[a, b]$. Alors en notant D_u le nombre de fois où le processus $x(t)$ atteint le niveau u . On a

$$\mathbb{E}(D_u) = \frac{b-a}{\pi} \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_0}} e^{-\frac{1}{2} \frac{u^2}{\lambda_0}}$$

4 Formule de Kac-Rice non stationnaire et exemples

4.1 Formule générale

Intéressons nous au cas gaussien non nécessairement stationnaire. Pour X un processus gaussien quelconque deux fois dérivable, la formule de Kac donne

$$\mathbb{E}(D_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_a^b \mathbb{E} [\mathbf{1}_{[-\varepsilon, +\varepsilon]}(x(t)) |x'(t)|] dt$$

Or, le théorème de l'espérance totale donne

$$\mathbb{E} [|X'(t)| \mathbf{1}_{[-\varepsilon, +\varepsilon]}(X(t))] = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} p_{X(t)}(u) \mathbb{E} [|X'(t)| | X(t) = u] du$$

Avec $p_{X(t)}$ la densité de $X(t)$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(D_0) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^b \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} p_{X(t)}(u) \mathbb{E} [|X'(t)| | X(t) = u] du dt \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \int_a^b p_{X(t)}(u) \mathbb{E} [|X'(t)| | X(t) = u] dt du \\ &= \int_a^b p_{X(t)}(0) \mathbb{E} [|X'(t)| | X(t) = 0] dt \end{aligned}$$

Donnant ainsi, la formule de Kac-Rice dans le cas non stationnaire :

$$\mathbb{E}(D_0) = \int_a^b p_{X(t)}(0) \mathbb{E} [|X'(t)| | X(t) = 0] dt$$

En posant $\tilde{X}'(t)$ la variable aléatoire de loi $X'(t)$ sachant $X(t) = 0$, on admet pour la suite que $\tilde{X}'(t)$ suit une loi normale dont les paramètres sont donnés par la proposition suivante :

Proposition 6. Soit $X(t)$ un processus gaussien centré de covariance r ,

$$\tilde{X}'(t) \sim \mathcal{N} \left(0, \partial_1 \partial_2 r(t, t) - \frac{\partial_1 r(t, t)^2}{r(t, t)} \right)$$

Remarque 3. On peut vérifier la cohérence de cette formule dans le cas stationnaire, en effet, dans le cas où X est stationnaire. Dans ce cas, $\partial_1 \partial_2 r(t, t) - \frac{\partial_1 r(t, t)^2}{r(t, t)} = -r''(0) - \frac{r'(0)^2}{r(0)} = -r''(0) = \lambda_2$

Un calcul similaire à précédemment, montre ainsi que

$$\mathbb{E}[\tilde{X}'(t)] = \sqrt{\frac{2}{\pi} \text{Var}(\tilde{X}'(t))} = \sqrt{\frac{2}{\pi} \left(\partial_1 \partial_2 r(t, t) - \frac{\partial_1 r(t, t)^2}{r(t, t)} \right)}$$

Et comme $p_{X(t)}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi r(t,t)}}$, on obtient au final

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(D_0) &= \int_a^b p_{X(t)}(0) \mathbb{E}[|X'(t)| \mid X(t) = 0] dt \\ &= \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi r(t,t)}} \sqrt{\frac{2}{\pi} \left(\partial_1 \partial_2 r(t,t) - \frac{\partial_1 r(t,t)^2}{r(t,t)} \right)} dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{\sqrt{r(t,t) \partial_1 \partial_2 r(t,t) - \partial_1 r(t,t)^2}}{r(t,t)} dt\end{aligned}$$

Théorème 4.1 (Formule de Kac-Rice généralisée). Soit $X(t)$ un processus gaussien centré de covariance r , l'espérance du nombre de zéros D_0 est donné par

$$\mathbb{E}(D_0) = \frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{\sqrt{r(t,t) \partial_1 \partial_2 r(t,t) - \partial_1 r(t,t)^2}}{r(t,t)} dt$$

L'intégrande peut être calculée d'une autre manière grâce à la proposition suivante :

Proposition 7.

$$\frac{r(x,y)|_{x=y=t} \partial_1 \partial_2 r(x,y)|_{x=y=t} - (\partial_1 r(x,y)|_{x=y=t})^2}{(r(x,y)|_{x=y=t})^2} = \partial_1 \partial_2 \ln r(x,y)|_{x=y=t}$$

Exemple 5 (Application au nombre de zéros d'une combinaison linéaire aléatoire de cos). *Intéressons nous*

au dénombrement du nombre de zéros du polynôme trigonométrique $y_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n a_k \cos(kt)$ sur $[0, 2\pi]$

avec $(a_k)_{k \geq 0}$ une suite de variable aléatoire gaussiennes centrées réduites iid.

La fonction de covariance de y_n est donnée par $\forall s, t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}r(s,t) &= \mathbb{E}[y_n(t)y_n(s)] \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[a_k^2] \cos(kt) \cos(ks) \quad \text{par indépendance des } (a_k) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos(kt) \cos(ks) \\ &= \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n (\cos(k(t-s)) + \cos(k(t+s)))\end{aligned}$$

Cette somme est la moyenne de la fonction de covariance de x_n étudiée précédemment (qui était stationnaire) et d'un terme non stationnaire.

On a alors,

$$\begin{aligned}r(t,t) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n \cos(2kt) \\ \partial_1 \partial_2 r(t,t) &= \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n k^2 (1 - \cos(2kt)) = \frac{(n+1)(2n+1)}{12} - \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n k^2 \cos(2kt) \\ \partial_1 r(t,t)^2 &= \frac{1}{4n^2} \left(\sum_{k=1}^n k \sin(2kt) \right)^2\end{aligned}$$

Des calculs de sommes trigonométriques donnent :

$$\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n k^2 \cos(2kt) = \mathcal{O}(n)$$

$$\partial_1 r(t, t)^2 = \frac{1}{4n^2} \left(\sum_{k=1}^n k \sin(2kt) \right)^2 = \mathcal{O}(1)$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{\pi} \frac{\sqrt{r(t, t) \partial_1 \partial_2 r(t, t) - \partial_1 r(t, t)^2}}{r(t, t)} &= 2\sqrt{\frac{(n+1)(2n+1)}{24}} + o(n) \\ &= 2\sqrt{\frac{(n+1)(2n+1)}{24}} + o(n) \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}n + o(n) \end{aligned}$$

Or, le théorème de convergence de dominé donne $\int_0^1 o(n) dt = o(n)$ d'où $\mathbb{E}[D_0] \sim \frac{1}{\sqrt{3}}n$

Remarque 4. On obtient que l'espérance du nombre de zéros de y_n est asymptotiquement équivalent à la moitié de de l'espérance du nombre de zéros de x_n

4.2 Nombre de zéros de polynômes aléatoires

Une application de la formule de Kac-Rice dans le cas général est l'étude du nombre moyen de zéros d'un polynôme aléatoire (dont les coefficients sont des variables aléatoires). La proposition suivante permet d'étendre à \mathbb{R} le dénombrement du nombre de zéros d'un polynôme aléatoire sur un intervalle.

Proposition 8. Soit $P : I \rightarrow \mathbb{R}$ un polynôme aléatoire $P(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k$ avec $(a_k)_{0 \leq k \leq n}$ gaussiennes i.i.d

d'espérance 0 et de variance v_k :

1. $\mathbb{E}[N(P, \mathbb{R}^+)] = \mathbb{E}[N(P, \mathbb{R}^-)]$
2. Si de plus $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket v_k = v_{n-k}$ alors $\mathbb{E}[N(P, (0, 1))] = \mathbb{E}[N(P, (1, +\infty))]$
3. Dans les mêmes hypothèses que 2. $\mathbb{E}[N(P, \mathbb{R})] = 4\mathbb{E}[N(P, (0, 1))] = 4\mathbb{E}[N(P, (1, +\infty))]$

Preuve :

1. On définit $P^-(t) = P(-t)$ et on a : $P^-(t) = \sum_{k=0}^n a_k (-1)^k t^k$ les variables aléatoires $((-1)^k a_k)_{0 \leq k \leq n}$ sont gaussiennes i.i.d d'espérance nulle et de variance $\text{Var}((-1)^k a_k) = (-1)^{2k} \text{Var}(a_k) = v_k$. Donc P et P^- ont même loi.
2. On définit $\tilde{P}(t) = t^n P(1/t)$ on a alors $\tilde{P}(t) = t^n \sum_{k=0}^n a_k t^k = \sum_{k=0}^n a_k t^{n-k} = \sum_{k=0}^n a_{n-k} t^k$ les variables aléatoires $(a_{n-k})_{0 \leq k \leq n}$ ont une espérance nulle et $\text{Var}(a_{n-k}) = v_{n-k} = v_k$ par hypothèse donc P et \tilde{P} ont même loi.
3. On a par 1/ et 2/ $\mathbb{E}[N(P, \mathbb{R})] = \mathbb{E}[N(P, \mathbb{R}^+)] + \mathbb{E}[N(P, \mathbb{R}^-)] = 2\mathbb{E}[N(P, \mathbb{R}^+)]$. De plus $\mathbb{R}^+ = [0, 1] \cup [1, +\infty)$ donc

$$\mathbb{E}[N(P, \mathbb{R}^+)] = \mathbb{E}[N(P, (0, 1))] + \mathbb{E}[N(P, (1, +\infty))] = 2\mathbb{E}[N(P, (0, 1))] = 2\mathbb{E}[N(P, (1, +\infty))]$$

□

4.2.1 Polynômes de Kac

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variable aléatoire gaussienne centrées iid. On définit le polynôme de Kac F_n par $\forall t \in \mathbb{R}, F_n(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k$.

$F_n(t)$ définit un processus gaussien dont la fonction de covariance r est donnée par $\forall s, t \in \mathbb{R}, r(s, t) = \sum_{k=0}^n (st)^k$

Pour t, s tel que $ts \neq 1$, on a $r(s, t) = \frac{1 - (st)^{n+1}}{1 - st}$ d'où $\ln r(s, t) = \ln(1 - (st)^{n+1}) - \ln(1 - st)$. On a alors

$$\partial_1(\ln r)(s, t) = \frac{t}{1 - st} - \frac{(n+1)(st)^nt}{1 - (st)^{n+1}} \text{ et } \partial_2\partial_1(\ln r)(s, t) = \frac{1}{(1 - st)^2} - \frac{(n+1)^2(st)^n}{(1 - (st)^{n+1})^2}$$

d'où

$$H_n(t) := \partial_1\partial_2(\ln r)(t, t) = \frac{1}{(1 - t^2)^2} - \frac{(n+1)^2 t^{2n}}{(1 - t^{2n+2})^2}$$

En posant alors $H_n(t) = \partial_1\partial_2(\ln r)(t, t)$, la formule de Kac-Rice donne et la proposition précédente donne donc :

$$\mathbb{E}(N(F_n, (0, 1))) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \sqrt{H_n(t)} dt$$

Donc, d'après la proposition suivante, on a

$$\mathbb{E}(N(F_n, \mathbb{R})) = \frac{4}{\pi} \int_0^1 \sqrt{H_n(t)} dt = \frac{4}{\pi} \int_1^{+\infty} \sqrt{H_n(t)} dt$$

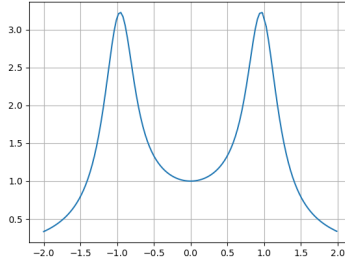


FIGURE 5 – Représentation graphique de la fonction $t \mapsto \sqrt{H_n(t)}$ sur $[-2, 2]$

La fonction $t \mapsto \sqrt{H_n(t)}$ s'interprète comme la densité moyenne du nombre de zéros des polynômes de Kac. En traçant la fonction, on remarque que les zéros d'un polynôme de Kac ont tendance à se concentrer autour de -1 et 1 .

Le théorème suivant donne un développement asymptotique de $\mathbb{E}(N(F_n, \mathbb{R}))$ lorsque $n \rightarrow +\infty$

Proposition 9 (Kac, Edelman-Kostlan).

$$\mathbb{E}(N(F_n, \mathbb{R})) \sim \frac{2}{\pi} \ln(n)$$

Références

- [1] Jean-Marc Azais, Mario Wschebor *Level sets and extrema of random processes and fields*
https://perso.univ-rennes1.fr/jean-christophe.breton/Fichiers/gauss_M2.pdf
- [2] Massimo Notarnicola. *How many zeros has a random polynomial?*
https://math.uni.lu/eml/projects/reports/notarnicola.pdf?fbclid=IwAR06VDSTvwp6LZofdcy_PBD-wdrsNCODAT4