Lecture dirigée : Le groupe de Thompson

Juliette VEUILLEZ–MAINARD & Antoine DEQUAY

Supervisé par Bert WIEST

9 mai 2019

Résumé

Ce document s'intéresse à un groupe infini, encore aujourd'hui sujet de recherche [GHY09] : Le groupe de Thompson F. Ce groupe a un certain nombre de propriétés remarquables, et nous avons choisi de nous concentrer sur quelques-unes d'entre elles : Une première proposition nous dira qu' "il existe un sous-groupe de F est isomorphe à $F \oplus F$". Viennent ensuite deux théorèmes plus fondamentaux : "F est généré par deux éléments" et "tout quotient de F est abélien". Toutes les définitions et notations des parties 1, 2 et 3 proviennent de [MEI08]. La dernière partie est basée sur [CFP96].

Remerciements

Nous aimerions remercier notre superviseur, Bert WIEST, pour sa gentillesse et sa générosité, ainsi que pour le temps qu'il nous a consacré durant cette période.

Table des matières

1 Notations et premières définitions

Commençons par rappeler quelques résultats, qui nous permettront de définir le groupe qui nous intéresse.

Définition 1. *Division dyadique.* Une *division dyadique* du segment $[0,1]$ est un ensemble de segments disjoints, dont l'union est le segment $[0,1]$. Elle est construite récursivement à partir de la *division dyadique* triviale $\{[0,1]\}$ en choisissant plusieurs segments à diviser en deux en leur milieu : à partir d'un segment $[a,b]$, deux segments $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ et $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ sont définis.

Nous appellerons D l'ensemble des divisions dyadiques de $[0,1]$.

Par exemple, $T_{ex} = \left\{ \left[0, \frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{2}, \frac{5}{8}\right], \left[\frac{5}{8}, \frac{3}{4}\right], \left[\frac{3}{4}, 1\right] \right\}$ est une *division dyadique* de $[0,1]$.

Définition 2. *Milieux choisis.* Avec la construction décrite ci-dessus, couper un segment en deux est équivalent à choisir son milieu comme nouveau point de division pour le segment $[0,1]$. Ces points seront appelés *milieux choisis*. Dans ce qui suit, un ensemble de *milieux choisis* sera identifié avec sa *division dyadique* correspondante.

Si l'on considère les divisions dyadiques de $[0,1]$ comme des ensembles de *milieux choisis*, il est facile de réaliser que D est stable par union.

Définition 3. *Intervalle dyadique standard.* Un *intervalle dyadique standard* est un intervalle de la forme $\left[\frac{m}{2^n}, \frac{m+1}{2^n}\right]$, où $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in [0, 2^n - 1]$.

Proposition 1. Une division du segment $[0,1]$ en *intervalles dyadiques standards* est une *division dyadique* de $[0,1]$.

Remarquons qu'une *division dyadique* peut être considérée comme un arbre binaire. En effet, on peut représenter les différents segments qui composent une division dyadique par les feuilles d'un arbre, comme suit :

Si un nœud est marqué par un segment $[a, b]$, son fils gauche correspondra au segment $\left[a, \dfrac{a+b}{2}\right]$, et son fils droit au segment $\left[\dfrac{a+b}{2}, b\right]$. La racine est étiquetée par le segment $[0, 1]$. L'ensemble des étiquettes des feuilles d'un tel arbre est une *division dyadique* de $[0, 1]$.

Nous utiliserons les deux représentations dans ce document et combinerons les notations. l'exemple T_{ex} utilisé précédemment peut être représenté comme suit :

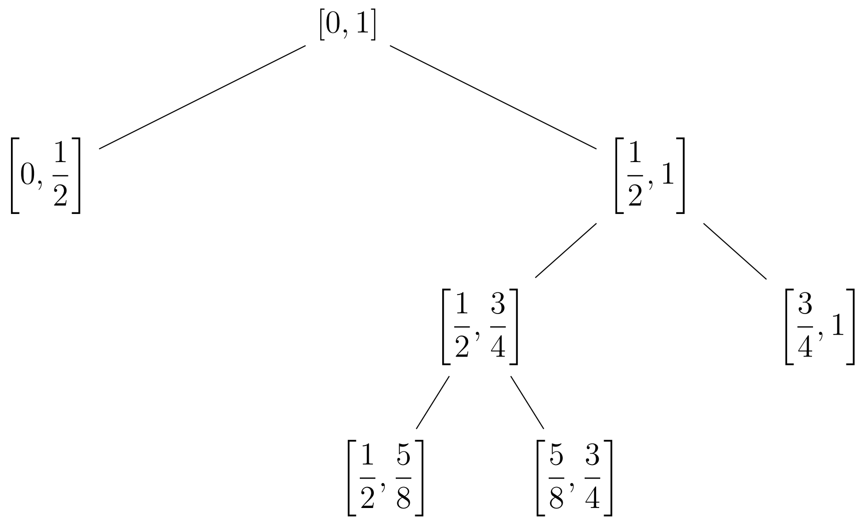


Figure 1: T_{ex}

2 Définition du groupe de Thompson et premières propriétés

Soient $0 < m_1 < m_2 < ... < m_k < 1$ et $0 < u_1 < u_2 < ... < u_k < 1$ deux ensembles de milieux choisis. Une fonction linéaire par morceaux f peut être définie avec les conditions :

1. $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.
2. Pour $i \in [\![1, k]\!]$, $f(m_i) = u_i$.
3. f restreint à $[0, m_1], [m_i, m_{i+1}]$ et $[m_k, 1]$ est linéaire, où $i \in [\![1, k-1]\!]$

Par exemple, si on note $\{m_i\}_{i\in[\![1,2]\!]} = \left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{4}\right\}$ et $\{u_i\}_{i\in[\![1,2]\!]} = \left\{\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}\right\}$, la fonction associée est représentée ci-après :

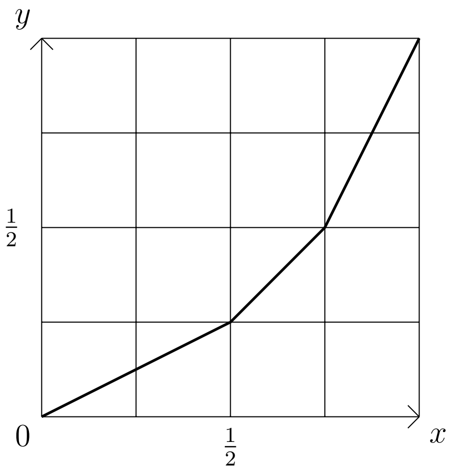


FIGURE 2: La fonction de Thompson associée à $\{m_i\}_{i\in[\![1,2]\!]}$ et $\{u_i\}_{i\in[\![1,2]\!]}$.

Définition 4. *Fonction de Thompson.* Les fonctions ainsi définies sont appelées *fonctions de Thompson.*

Notation Si $T_1 = \{m_i\}_{i\in[\![1,k]\!]}$ et $T_2 = \{u_i\}_{i\in[\![1,k]\!]}$ sont deux ensembles de milieux choisis, la fonction de Thompson décrite plus haut sera notée : $[T_2 \leftarrow T_1]$.
Si $[T_4 \leftarrow T_3]$ est une autre fonction de Thompson, alors "$[T_2 \leftarrow T_1][T_4 \leftarrow T_3]$" correspondra à la composition de la fonction $[T_2 \leftarrow T_1]$ avec la fonction $[T_4 \leftarrow T_3]$.

Proposition 2. Les fonctions de Thompson forment un groupe pour la composition de fonctions.

Lemme 1. Soit T_1, T_2 et T_3 des ensembles de milieux choisis tels que $|T_1| = |T_2| = |T_3| = k$ où $|.|$ est la fonction cardinal. Alors :

$$[T_3 \leftarrow T_2][T_2 \leftarrow T_1] = [T_3 \leftarrow T_1] \tag{1}$$

Preuve du Lemme 1. En effet, on a :

— Si $f = [T_3 \leftarrow T_2]$, $g = [T_2 \leftarrow T_1]$ et $h = f \circ g$, alors $h(0) = f \circ g(0) = f(0) = 0$ et $h(1) = f \circ g(1) = f(1) = 1$.

— Notons pour $i \in [\![1,3]\!]$, $T_i = \{m_{i,j}\}_{j\in[\![1,k]\!]}$, alors pour $j \in [\![1,k]\!]$, $h(m_{1,j}) = f \circ g(m_{1,j}) = f(m_{2,j}) = m_{3,j}$.

— Finalement, en remarquant que pour tout $j \in [\![1,k-1]\!]$, $g([m_{1,j}, m_{1,j+1}]) = [m_{2,j}, m_{2,j+1}]$, $g([0, m_{1,1}]) = [0, m_{2,1}]$ et $g([m_{1,k}, 1]) = [m_{2,k}, 1]$, et que pour tout $j \in [\![1,k-1]\!]$, $f([m_{2,j}, m_{2,j+1}]) = [m_{3,j}, m_{3,j+1}]$, $g([0, m_{2,1}]) = [0, m_{3,1}]$ et $g([m_{2,k}, 1]) = [m_{3,k}, 1]$, par définition de f et g, il s'ensuit que sur chacun des segments décrits, h est linéaire.

Ainsi, $h = [T_3 \leftarrow T_1]$, d'où l'équation (1).

□

Que dire maintenant de la composition de deux fonctions de Thompson $f = [T_2 \leftarrow T_1]$ and $g = [T_4 \leftarrow T_3]$ dans le cas général ? Nous nous ramènerons au cas du Lemme 1 en notant qu'il n'y a pas unicité de l'écriture d'une fonction de Thompson.

Notation Soient $T = \{m_j\}_{j \in [\![1,k]\!]}$ un ensemble ordonné de milieux choisis, et $i \in [\![0,k]\!]$. On définit $T \wedge i := T \cup \left\{ \dfrac{m_i + m_{i+1}}{2} \right\}$, avec la convention $m_0 = 0$ et $m_{k+1} = 1$. Cela revient à couper en deux le $i^{\text{ème}}$ segment représenté par T, où la numérotation commence à 0. En termes d'arbres, si on numérote les feuilles de 0 à k de gauche à droite, cela revient à ajouter deux fils (comme un "$\wedge$") à la $i^{\text{ème}}$ feuille.

Par exemple, $T_{ex} \wedge 0$ peut être est représenté ci dessous :

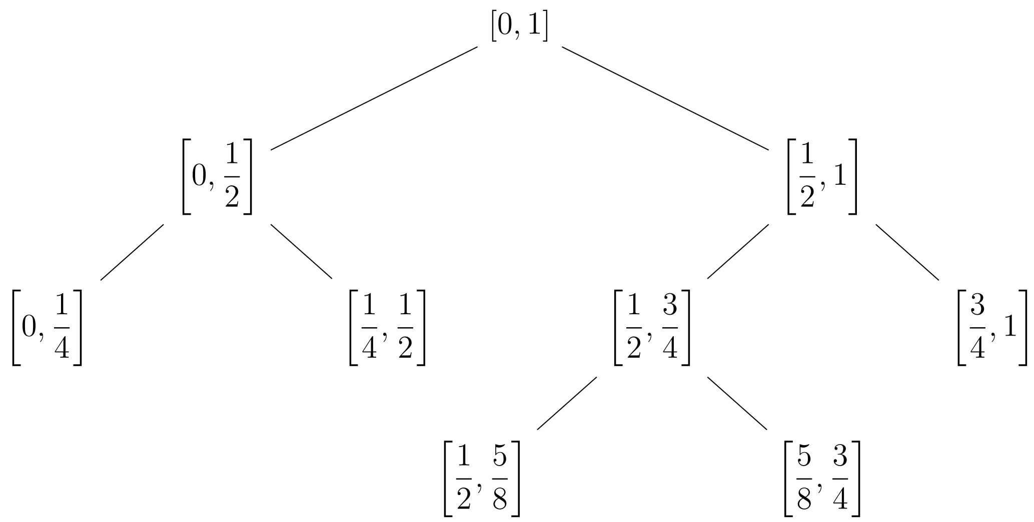


FIGURE 3: $T_{ex} \wedge 0$

Avec cette notation, on remarque que pour tout $i \in [\![0, |T_1|]\!]$, $[T_2 \leftarrow T_1] = [T_2 \wedge i \leftarrow T_1 \wedge i]$.

Preuve de la Proposition 2. D'abord, on doit noter que la fonction identité appartient à l'ensemble examiné. On note $e = [T \leftarrow T]$, pour tout T ensemble de milieux choisis.

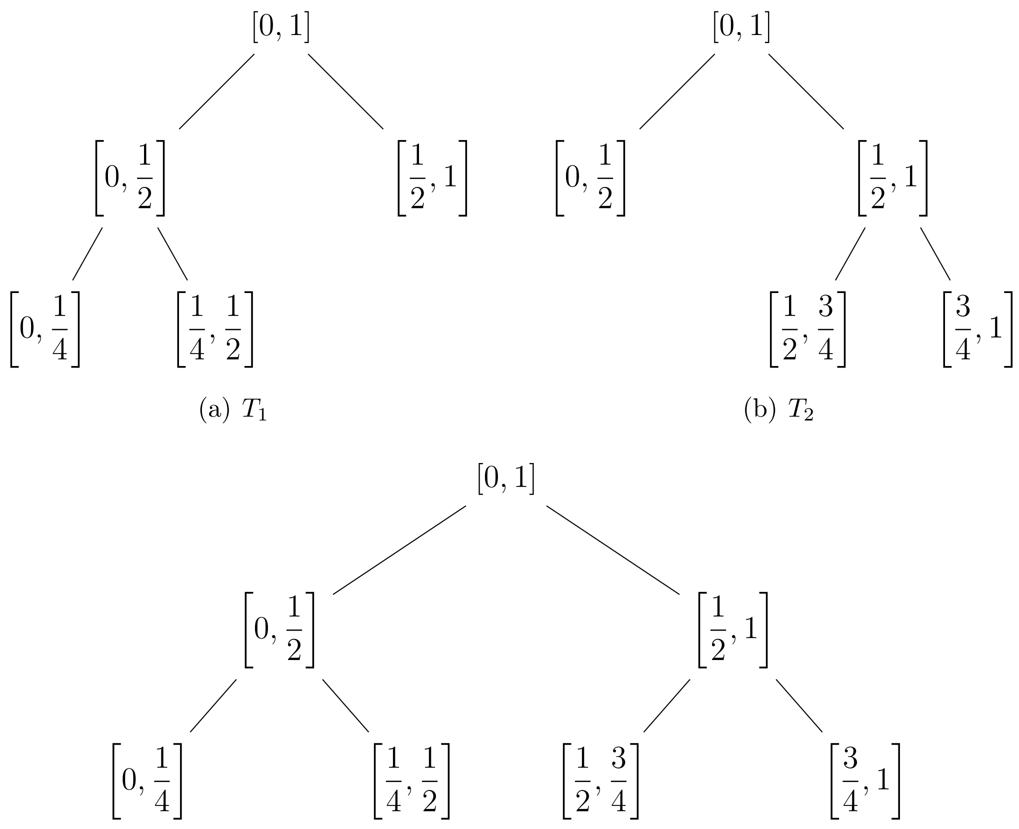
Avec la remarque précédente et le Lemme 2, en utilisant les notations introduites précédemment, on a :

$$f \circ g = [T_2 \leftarrow T_1]\,[T_4 \leftarrow T_3] = [T_2' \leftarrow T_1 \cup T_4]\,[T_4 \cup T_1 \leftarrow T_3'] = [T_2' \leftarrow T_3'].$$

Où T_2' et T_3' sont construits ci-après :

L'idée est la suivante : On prend deux calques. On dessine sur le premier T_1, sur le second T_4, et on superpose les deux arbres de sorte que les racines soient confondues. On obtient alors un nouvel arbre, que l'on note $T_1 \cup T_4$.

Par exemple, cela donne :



(a) T_1

(b) T_2

(c) $T_1 \cup T_2$

FIGURE 4: Construction de $T_1 \cup T_2$.

On remarque que l'union de deux arbres peut toujours être construite à partir des arbres de départ, par ajouts successifs de feuilles.

Formellement, cela donne :

$$\exists (k_2, k_3) \in \mathbb{N}^2, \forall j \in \{2,3\}, \exists \left(t_{j,i}\right)_{i \in [\![1,k_j]\!]} \in \mathbb{N}^{k_j}, T_1 \cup T_4 = T_1 \bigwedge_{i=1}^{k_2} t_{2,i} = T_4 \bigwedge_{i=1}^{k_3} t_{3,i}$$

Où $T_1 \bigwedge_{i=1}^{k_2} t_{2,i} := (...((T_1 \wedge t_{2,1}) \wedge t_{2,2})... \wedge t_{2,k_2-1}) \wedge t_{2,k_2}$.

Ainsi, on définit pour $j \in \{2,3\}$, $T'_j := T_j \bigwedge_{i=1}^{k_j} t_{j,i}$.

Par la remarque de la page précédente, on a bien :

$$[T_2 \leftarrow T_1] = [T'_2 \leftarrow T_1 \cup T_4] \text{ et } [T_4 \leftarrow T_3] = [T_4 \cup T_1 \leftarrow T'_3]$$

On a ainsi montré que l'ensemble étudié est stable par composition.

Le Lemme 1 permet de montrer que $[T_2 \leftarrow T_1]^{-1} = [T_1 \leftarrow T_2]$.

Ainsi, l'ensemble considéré est un groupe pour la composition de fonctions [1].

$\square$

Définition 5. *Groupe de Thompson.* Ce groupe est appelé le *groupe de Thompson*, et est noté F.

Examinons maintenant une propriété surprenante du groupe de Thompson.

Proposition 3. F contient un sous-groupe isomorphe à $F \oplus F$.

Pour prouver cette propriété, introduisons quelques définitions.

Définition 6. *Support.* Tout d'abord, définissons le *support* de $f \in F$ par :

$Supp(f) := \{x \in [0,1] \,|\, f(x) \neq x\}$.

A partir du support, on peut définir les deux ensembles suivants :

Définition 7. *F_l et F_r.* On se donne : $F_l := \left\{ f \in F \middle| Supp(f) \subset \left(0, \frac{1}{2}\right) \right\}$ et $F_r := \left\{ f \in F \middle| Supp(f) \subset \left(\frac{1}{2}, 1\right) \right\}$.

Proposition 4. Ces deux ensembles sont des sous-groupes de F.

Preuve Sur une moitié de l'intervalle $[0,1]$, les fonctions considérées sont égales à l'identité et sur l'autre moitié, elles correspondent à une fonction de Thompson. F étant bien un groupe, le résultat suit.

1. En fait, on a prouvé que F est un sous-groupe de $(C([0,1]), \circ)$.

$\square$

Il reste à voir que le sous-groupe engendré par F_l et F_r est $F_l \oplus F_r \simeq F \oplus F$.

Pour cela, introduisons des fonctions de "rétrécissement".

Définition 8. *Fonctions de "rétrécissement".* On définit deux morphismes :

$$\begin{array}{rccc} l: & F & \longrightarrow & F_l \\ & f & \longmapsto & f_l \end{array} \quad \text{où} \quad \begin{array}{rccc} f_l: & [0,1] & \longrightarrow & [0,1] \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} f(2x)/2 & \text{pour} \quad x \in [0,1/2] \\ x & \text{pour} \quad x \in [1/2,1] \end{cases} \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccc} r: & F & \longrightarrow & F_r \\ & f & \longmapsto & f_r \end{array} \quad \text{où} \quad \begin{array}{rccc} f_r: & [0,1] & \longrightarrow & [0,1] \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} x & \text{pour} \quad x \in [0,1/2] \\ (1+f(2x))/2 & \text{pour} \quad x \in [1/2,1] \end{cases} \end{array}$$

Puisqu'on a $F_l \simeq F$ et $F_r \simeq F$, il ne reste qu'à prouver que $F_l \oplus F_r$ a un sens.

Pour cela, il est suffisant de noter que, si le support de deux fonctions de F est séparé, elles commutent pour la composition car les fonctions concernées correspondent à la fonction identité hors de leur support).

Finalement, on a bien prouvé la Proposition 3.

3 Un premier théorème : Le groupe de Thompson F est généré par deux éléments

Théorème 1. Le *groupe de Thompson F* est engendré par un ensemble dénombrable d'éléments.

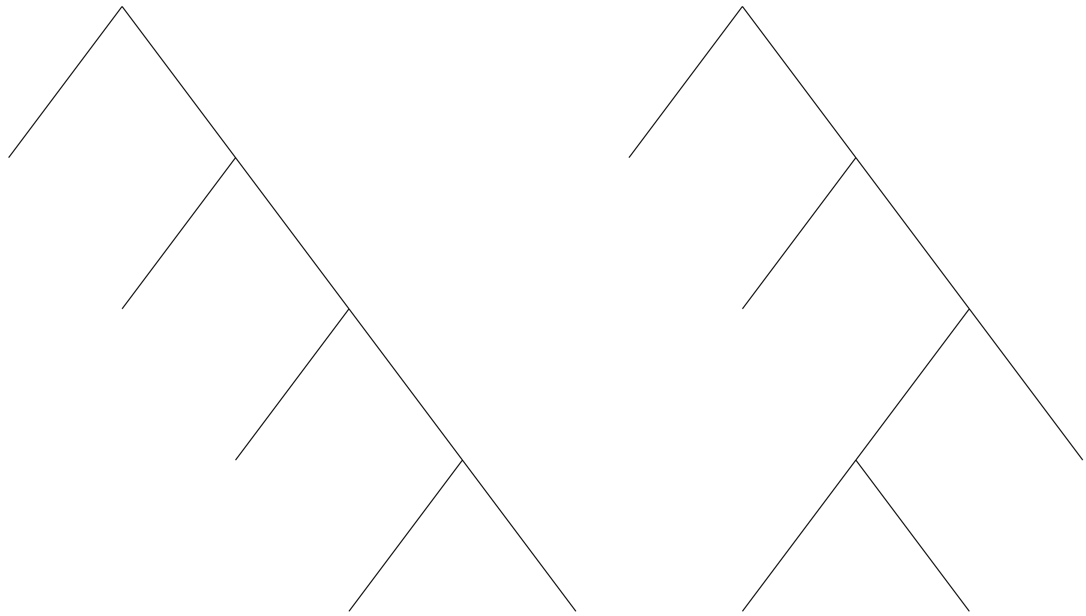
Commençons par introduire deux arbres particuliers :

Définition 9. *Les arbres $\mathcal{T}_n$ et $\mathcal{S}_n$.* Définissons $\mathcal{T}_n$ et $\mathcal{S}_n$ pour construire un ensemble générateur de F :

— $\mathcal{T}_0$ est l'arbre composé d'une racine et de deux feuilles (de la forme "$\wedge$"), et $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{T}_{n+1} = \mathcal{T}_n \wedge (n+1)$.

— $\mathcal{S}_0 = \mathcal{T}_0$, et $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{S}_{n+1} = \mathcal{T}_n \wedge n$.

Les arbres représentatifs de $\mathcal{T}_3$ et $\mathcal{S}_3$ sont représentés ci-dessous :



(a) $\mathcal{T}_3$ (b) $\mathcal{S}_3$

Définition 10. *Eléments positifs et négatifs de F.* Une *fonction positive* f est un élément $f \in F$ de la forme $[T \leftarrow \mathcal{T}_n]$. Une *fonction négative* f est un élément $f \in F$ de la forme $[\mathcal{T}_n \leftarrow T]$.

Il est à noter que les éléments négatifs de F sont exactement les inverses des éléments positifs de F. Essayons maintenant, à partir d'une fonction quelconque, de nous ramener à l'étude de telles fonctions.

Lemme 2. Toute fonction de F peut s'exprimer comme la composition de fonctions positives et négatives de F.

Preuve Notons f la fonction : $f = [S \leftarrow T]$ où $|T| = n + 1$. D'après le Lemme 1, f peut s'écrire :

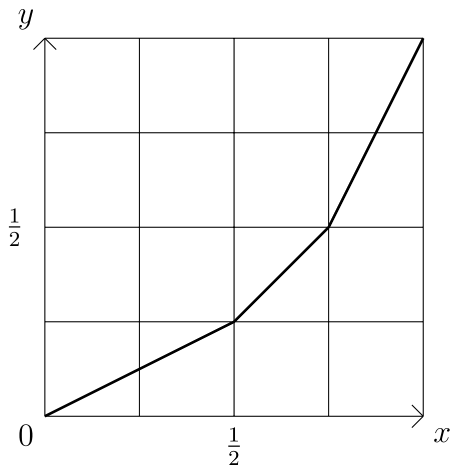
$$f = [S \leftarrow \mathcal{T}_n] [\mathcal{T}_n \leftarrow T] \tag{2}$$

□

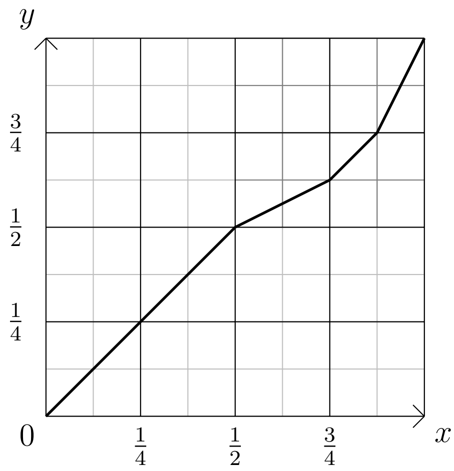
Définition 11. *Les fonctions x_i.* Si $i \in \mathbb{N}$, on note : $x_i := [\mathcal{S}_{i+1} \leftarrow \mathcal{T}_{i+1}]$.

En fait, x_i est simplement une copie de x_0, rétrécie dans l'espace $[1-(1/2)^n, 1] \times [1-(1/2)^n, 1]$.

Les fonctions x_0 et x_1 sont tracées si dessous :



(c) Le graphe de x_0.



(d) Le graphe de x_1.

Maintenant, prouvons que F est généré par l'ensemble infini $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, ce qui prouvera le Théorème 1.

Preuve Il est utile de noter la formule suivante : Si $i < n+2$, alors :

$$[T \leftarrow \mathcal{T}_n] \cdot x_i = [T \wedge i \leftarrow \mathcal{T}_{n+1}] \tag{3}$$

Ainsi, grace au Lemme 2, il suffit de montrer que toute fonction positive de F peut s'exprimer comme le produit des $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ et des $\{x_i^{-1}\}_{i\in\mathbb{N}}$ pour prouver le Théorème 1.

Soit $f = [T \leftarrow \mathcal{T}_n]$ une fonction positive de F. On peut montrer que T admet un sous-arbre partant de la racine de la forme $\mathcal{T}_k$, avec $k \in \mathbb{N}$ maximal (par exemple, $k = 1$ pour T_{ex}) de sorte qu'il existe $(i_j)_{j\in[\![1,n-k-2]\!]} \in \mathbb{N}^{n-k-2}$ tel que $T = \mathcal{T}_k \bigwedge_{j=1}^{n-k-2} i_j$. Ainsi, par (3), $f = [\mathcal{T}_k \leftarrow \mathcal{T}_k] \prod_{j=1}^{n-k-2} x_{i_j}$, et comme $[\mathcal{T}_k \leftarrow \mathcal{T}_k] = e$, f est sous la forme souhaitée.

$\square$

Corollaire 1. *Le groupe de Thompson* F est généré par x_0 et x_1.

Preuve Il suffit de voir que, pour $i < n$, on a :

$$x_n \cdot x_i = x_i \cdot x_{n+1} \tag{4}$$

Soit :

$$x_i^{-1} \cdot x_n \cdot x_i = x_{n+1} \tag{5}$$

On a donc $x_2 = {x_0}^{-1} \cdot x_1 \cdot x_0$, et on peut montrer plus généralement que, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$x_{n+1} = {x_0}^{-n} \cdot x_1 \cdot x_0^n$$

Finalement, tout élément de F peut être écrit comme un produit de $\left\{x_0, x_1, {x_0}^{-1}, {x_1}^{-1}\right\}$, d'où le résultat annoncé.

$\square$

4 Un autre théorème : Tout quotient de F est abélien

Théorème 2. Tout groupe quotient de F est abélien.

Preuve Soit N un sous-groupe normal de F. Montrons, grâce à une série de propriétés, que F/N est abélien.

Commencons par examiner le centre de F.

Proposition 5. Le centre de F, noté $\mathcal{Z}(F)$ est trivial.

Preuve de la proposition 5. Soit f un élément de $\mathcal{Z}(F)$. Soit $g \in F$. Comme f et f^{-1} commutent avec g, on a

$$f\left(\overline{supp\,(g)}\right) \subset \overline{supp\,(g)} \tag{6}$$

Où $\overline{A}$ désigne le complémentaire de A dans $[0,1]$, pour $A \subset [0,1]$. On note $I_g := \overline{supp\,(g)}$.

Ainsi, pour $g = x_1$, on a $u := f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \in I_g$. Supposons $u \neq \frac{1}{2}$. Alors, on a $u < \frac{1}{2}$. Donc, par croissance de f, on a $\frac{1}{2} = f(u) < f\left(\frac{1}{2}\right) \in I_{x_1}$. Donc, comme $I_{x_1} = \left[0, \frac{1}{2}\right] \cup \{1\}$, on a $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$. C'est absurde, donc $u = \frac{1}{2}$.

On en conclut donc que $\frac{1}{2} \in I_f$.

Soient $R, S \in D$ tels que $f = [R \to S]$, avec $R = \{r_i\}_{i \in [\![1,n]\!]}$. Or,pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, il existe $h_i \in F$ tel que $h_i\left(\frac{1}{2}\right) = r_i$.

Ainsi, par (6), on a : $\forall i [\![1, n]\!], r_i \in I_f$. On a alors $f = e$. D'où le résultat annoncé.

□

Soit $f \in N, f \neq e$. Par la propriété précédente : $\exists g \in F, [g, f] \neq e$, où $[g, f] := gfg^{-1}f^{-1}$.

Le sous-groupe N étant normal, on a $gfg^{-1} \in N$. Comme N est en particulier un sous-gourpe, il vient : $[g, f] \in N$.

Il existe donc un commutateur de F non trivial dans N.

Montrons à présent un théorème important, permettant d'exprimer de manière unique tout élément de F comme un produit remarquable des $\{x_i\}_i$.

Pour cela, on a besoin d'une première définition :

Définition 12. *Exposants d'un arbre.* Soit T un arbre binaire dont les feuilles sont numérotées de gauche à droite de 0 à n. On définit a_i pour $i \in [\![1, n]\!]$ comme la taille du plus long chemin partant de la feuille i et remontant toujours "à droite" ($\nearrow$), tel que ce chemin ne touche pas la branche droite de l'arbre. La branche droite de l'arbre correspond au chemin de la feuille n à la racine (comprise dans le chemin). Les a_i sont appelés *exposants* de T.

Par exemple, si on se donne :

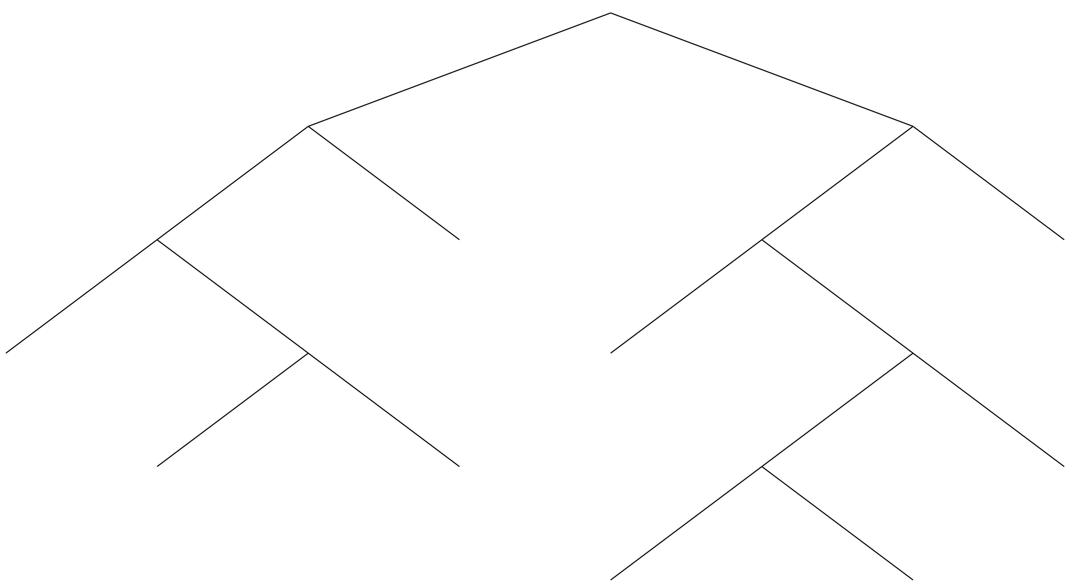


FIGURE 5: Les exposants de T sont, dans l'ordre : $2, 1, 0, 0, 1, 2, 0, 0, 0$.

Théorème 3. Soient $f = [S \leftarrow R] \in F$, $n = |S|$, $\{b_i\}_{i \in [\![1,n]\!]}$ les exposants de S et $\{a_i\}_{i \in [\![1,n]\!]}$ les exposants de R. Alors on a :

$$f = \prod_{i=0}^{n} x_i^{b_i} \prod_{i=0}^{n} x_{n-i}^{-a_{n-i}} \tag{7}$$

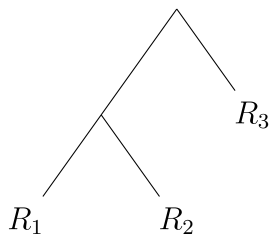
Preuve D'après (2) et la remarque suivant la Définition 10, on peut on peut se restreindre à la preuve de : $[\mathcal{T}_n \leftarrow R] = \prod_{i=0}^{n} x_{n-i}^{-a_{n-i}}$.

On procède par induction sur $a := \sum_{i=0}^{n} a_i$.

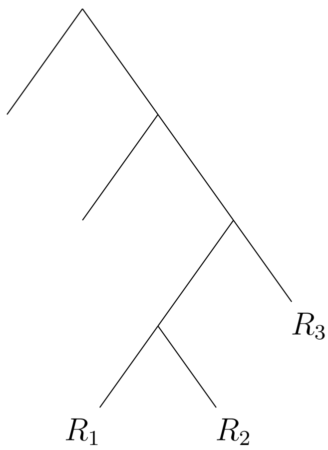
Si $r = 0$, on a $R = \mathcal{T}_n$, et on a le résultat attendu.

On suppose donc que $a > 0$, et que l'hypothèse est vraie pour tout $a' < a$. Soit $m \in [\![1, n]\!]$ tel que $a_m \neq 0$ et que pour tout $0 \leq k < m, a_k = 0$.

Alors, par défintion de m, R est de la forme suivante, où R_1, R_2 et R_3 sont trois sous-arbres de R :



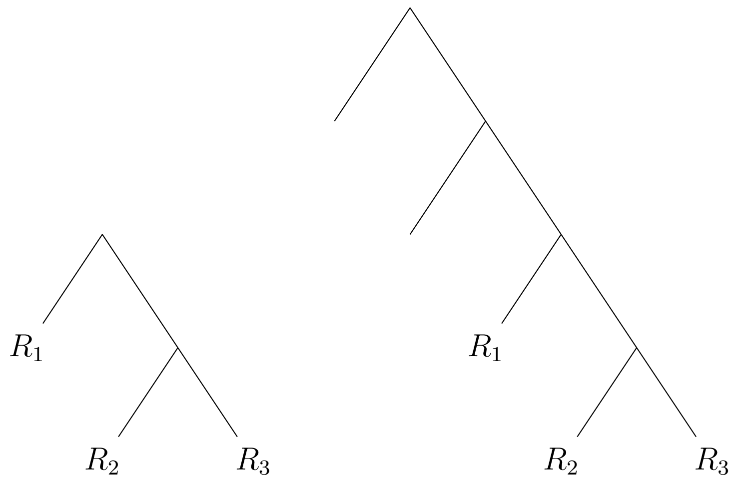
(a) m=0



(b) m=2

FIGURE 6: Forme de R pour deux valeurs de m.

Définissons R' dans le cas général comme sur les deux exemples suivants :



(a) m=0 (b) m=2

FIGURE 7: Forme de R' pour deux valeurs de m.

Formellement, on peut écrire $R = \mathcal{S}_{m+1} \bigwedge_{j=1}^{l} i_j$ et $R' = \mathcal{T}_{m+1} \bigwedge_{j=1}^{l} i_j$ pour un certain l dans $\mathbb{N}$. On a donc $[R' \leftarrow R] = x_m^{-1}$.

Par sa définition, les exposants de R' sont les $\{a'_k\}_{k \in [\![1,n]\!]}$ où, pour $k \neq m, a'_k = a_k$ et tel que $a'_m = a_m - 1$. Par hypothèse d'induction, on a bien le résultat, car on a alors, grâce à (4) :

$$[\mathcal{T}_n \leftarrow R] = [\mathcal{T}_n \leftarrow R'] \, [R' \leftarrow R] = \prod_{i=0}^{n-m-1} x_{n-i}^{-a_{n-i}} \cdot x_m^{-a_n+1} \cdot \prod_{i=n-m+1}^{n} x_{n-i}^{-a_{n-i}} \cdot x_m^{-1} = \prod_{i=0}^{n} x_{n-i}^{-a_{n-i}}$$

□

On peut donc maintenant exprimer simplement tout élément de F.
Reprenons la fonction $f \in N$ introduite précédemment, et notons $f = \prod_{i=0}^{n} x_i^{b_i} \prod_{i=0}^{n} x_{n-i}^{-a_{n-i}}$.

On va montrer que $a_0 = b_0$.

On introduit le morphisme $\phi : F \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ qui à une fonction $g \in F$ associe le couple (a, b) tel que la dérivée à droite de g en 0 est 2^a et la dérivée à gauche de g en 1 est 2^b. Si $g = xyx^{-1}y^{-1}$ est un commutateur, alors, ϕ étant un morphisme, $\phi(g) = (0, 0)$.

Cela amène donc à $a_0 = b_0$.

A présent, on peut simplifier la forme de f. On note k le plus petit indice tel que $a_k \neq b_k$ et on utilise à plusieurs reprises (5), grâce à des artifices de calculs :

— Quitte à remplacer f par $x_k^{-a_k} \dots x_0^{-a_0} f x_0^{a_0} \dots x_k^{-a_k}$, on peut supposer $b_0 = \dots = b_{k-1} = 0$, $a_0 = \dots = a_k = 0$ et $b_k > 0$.

— Maintenant, quitte à remplacer f par $x_0^{k-1} f x_0^{1-k}$, on peut supposer que $a_0 = a_1 = b_0 = 0$ et $b_1 > 0$.

Dans ce cas, on a $(x_0^{-1} f x_0)(x_1^{-1} f x_1)^{-1} = x_2^{b_1} x_1^{-b_1}$. Notons $b = b_1$ pour simplifier les notations. Comme N contient $x_1^{-b}(x_2^b x_1^{-b}) x_1^b = x_1^{-b} x_2^b$, N contient :

$$x_0 x_2^{b-1}(x_2(x_1^{-b}x_2^b)x_2^{-1}(x_2^{-b}x_1^b))x_2^{1-b}x_0^{-1} = x_1 x_0^{-1} x_1^{-1} x_0 = [x_1, x_0^{-1}]$$

Le groupe F étant engendré par x_0 et x_1, on a bien F/N abélien.

$\square$

Bibliographie

[CFP96] J. W. CANNON, W. J. FLOYD, and W. R. PARRY. Notes on Richard Thompson's groups F and T, 1996.

[GHY09] Etienne GHYS. *Ce groupe m'agace !* Image des Mathématiques, may 2009. `http://images.math.cnrs.fr/Ce-groupe-m-agace.html`.

[MEI08] John MEIER. *Group, Graphs and Trees*, chapter 10 : Thompson's Group, pages 187–197. LMSST, Cambridge University Press edition, 2008. Student Texts 73.