Le groupe circulaire

Florian BOUGUET

Référence : M. Audin, *Géométrie*

On voit ici la droite projective complexe $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ comme le plan complexe muni d'un point à l'infini, que l'on notera ∞ pour être un peu original.

Theorème 1

Notons G le groupe engendré par les homographies et la conjugaison complexe. G est exactement l'ensemble des bijections de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ sur lui-même préservant l'ensemble des cercles ou droites (c'est-à-dire envoyant un cercle ou une droite sur un cercle ou une droite).

Preuve du théorème :

On va procéder par double inclusion, et un sens est trivial. En effet, on sait que les homographies sont des bijections de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ sur lui-même. D'autre part, puisqu'elles préservent le birapport (et puisque le birapport de quatre points est réel si, et seulement si, ils sont alignés ou cocycliques) elles préservent l'ensemble des cercles ou droites. Enfin, la conjugaison complexe est une symétrie toute bête par rapport à $\mathbb{R}$, et envoie donc un cercle sur un cercle et une droite sur une droite.

Considérons φ une bijection de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ sur lui-même préservant l'ensemble des cercles ou droites. Rappelons qu'à tout couple de triplets de points de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ correspond une homographie envoyant le premier sur le second. Donc, quitte à composer φ par une homographie (ce qui ne modifie l'appartenance ou la non-appartenance à G), on peut supposer que $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$ et $\varphi(\infty) = \infty$. Cette troisième condition sur φ implique immédiatement que φ conserve les cercles ou les droites, mais séparément cette fois-ci !

φ préserve les divisions harmoniques

On va montrer que φ conserve les divisions harmoniques. Rappelons que a, b , c et d sont en division harmonique si $[a, b, c, d] = -1$. Un cas particulier très utile par la suite est que

$$[a, b, c, \infty] = -1 \Leftrightarrow c = \frac{a+b}{2}$$

.

Cette partie du développement fait appel au lemme suivant :

Lemme 1

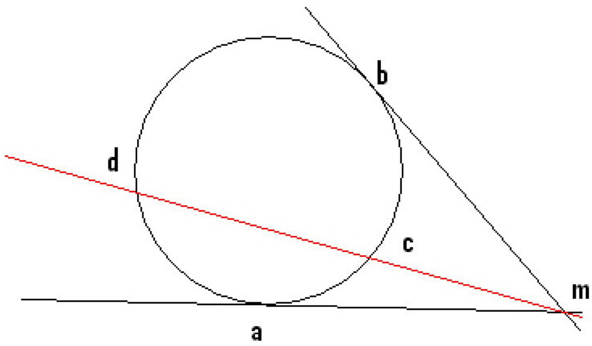
Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ distincts. La construction de l'unique point $d \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ tel que a, b, c et d soient en division harmonique se fait uniquement en matière d'intersection et de tangence de droites et de cercles.

Une fois ce lemme prouvé, la conclusion est quasiment immédiate. En effet, φ préserve la tangence et l'intersection par injectivité, et préserve les cercles ou les droites. Donc φ préservera la situation des points a, b, c et d et donc le fait qu'ils soient en division harmonique.

Preuve du lemme :

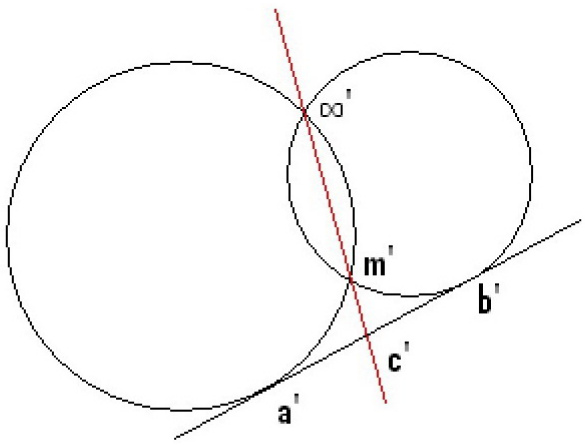
On se donne donc trois points $a, b, c \in \mathbb{C}$ distincts. Deux cas se posent : les points sont alignés ou cocycliques. Nous donnerons à chaque fois la méthode de construction du point d, que nous justifierons ensuite.

Cas des points cocycliques
Construction :



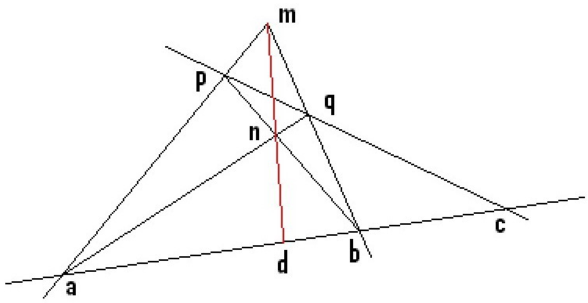
Considérons le point m issu des tangentes à a et b (qui peut éventuellement être égal à ∞ si les tangentes sont parallèles). La seconde intersection de la droite (mc) avec le cercle est d.

Justification : *On envoie d à l'infini par une homographie*



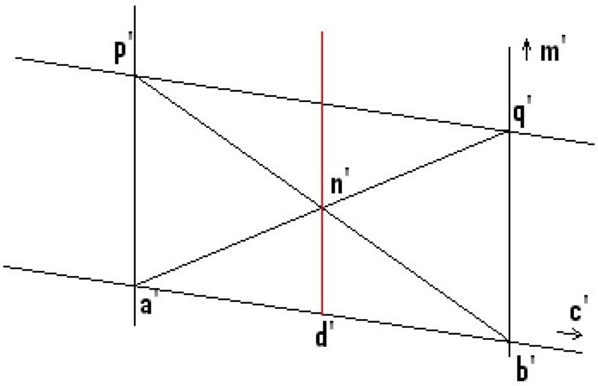
La droite rouge devient l'axe radical des deux cercles, et coupe donc $[ab]$ en son milieu, c. Donc $[a, b, c, d] = -1$, et on peut conclure par conservation du birapport par les homographies (si comme 99% des étudiants de M2 vous n'avez jamais entendu parler d'axe radical ou de puissance par rapport à un cercle, allez jeter un oeil aux remarques). Si $m = \infty$, alors la droite rouge devient la tangente commune aux deux cercles, et est encore leur axe radical.

Cas des points alignés
Construction :



On choisit un point m en dehors de la droite (ab), et on trace une droite issue de c coupant $[am]$ et $[bm]$. On peut alors tracer la droite (mn), où n est le centre du quadrilatère qu'on vient d'obtenir. (mn) coupe (ab) en d.

Justification 1 : *On envoie (mc) à l'infini par une homographie*



Cette justification, bien que plus intuitive et plus rapide, utilise malheureusement des notions de plan projectif et d'homographies en dimension supérieure, qui ne sont plus au programme (du moins en 2012) et risque donc de vous entraîner sur un terrain glissant. En effet, la justification se fait dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$...Bref, n' devient le centre d'un parallélogramme, et la droite rouge coupe donc $[a'b']$ en son milieu. On a alors que $[a', b', c', d'] = [a', b', d', c']^{-1} = [a', b', d', \infty]^{-1} = -1$, et on peut alors conclure à nouveau par conservation du birapport.

Justification 2 :
On se place en coordonnées barycentriques dans le système (a, b, m). Rappelons que toutes les coordonnées sont définies à constante multiplicative non-nulle près. Si $n = (\alpha, \beta, \mu)$, où α, β, mu sont tous non-nuls, alors on a immédiatement $p = (\alpha, 0, \mu), q = (0, \beta, \mu), d = (\alpha, \beta, 0)$ car ils appartiennent chacun à un côté du triangle.
p, q et c sont alignés, donc $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $c = p + \lambda q = (\alpha, \lambda\beta, (1 + \lambda)\mu)$. Puisque a, b et c sont aussi alignés, $(1 + \lambda)\mu = 0$ donc $c = (\alpha, -\beta, 0)$.
Donc

$$\frac{d-b}{d-a} = \frac{\alpha}{\beta} = -\frac{\alpha}{-\beta} = \frac{c-b}{c-a}$$

Donc$[a,b,c,d]=-1$.

φ est un automorphisme de corps

Grâce à la conservation des divisions harmoniques, on va montrer que $\varphi_{|\mathbb{C}}$ est un automorphisme de corps. Considérons $a,b\in\mathbb{C}$. φ conserve les divisions harmoniques donc les milieux.

$$\begin{aligned}\varphi\left(\frac{a+b}{2}\right) &= \frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}\\ &= \varphi\left(\frac{(a+b)+0}{2}\right)=\frac{\varphi(a+b)+\varphi(0)}{2}=\frac{\varphi(a+b)}{2}\end{aligned}$$

Donc $\varphi(a+b)=\varphi(a)+\varphi(b)$. On en déduit que

$$\varphi(a-a)=\varphi(a)+\varphi(-a)=\varphi(0)=0$$

Donc $\varphi(-a)=-\varphi(a)$.

$\forall a\in\mathbb{C}\backslash\{0,1\}$, remarquons que

$$[a,-a,a^2,1]=\frac{\frac{1+a}{1-a}}{\frac{a^2+a}{a^2-a}}=\frac{\frac{1+a}{1-a}}{-\frac{1+a}{1-a}}=-1$$

Les points a, $-a$, a^2 et 1 étant en division harmonique, on a

$$\begin{aligned}[a,-a,a^2,1] &= [\varphi(a),\varphi(-a),\varphi(a^2),\varphi(1)]=[\varphi(a),-\varphi(a),\varphi(a^2),1]\\ &= [\varphi(a),-\varphi(a),1,\varphi(a^2)]=-1\end{aligned}$$

Cette relation étant vraie pour tout complexe différent de 0 et 1, elle reste vraie pour $\varphi(a)$ si $a\neq 0$ ou 1. Donc

$$\begin{aligned}[\varphi(a),-\varphi(a),\varphi(a)^2,1] &= [\varphi(a),-\varphi(a),1,\varphi(a)^2]=-1\\ &= [\varphi(a),-\varphi(a),1,\varphi(a^2)]\end{aligned}$$

Par unicité du birapport, on conclut que $\varphi(a^2)$=$\varphi(a)^2$ (ce résultat reste vrai si $a=0$ ou 1)

Pour finir, remarquons que $ab=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$. Donc

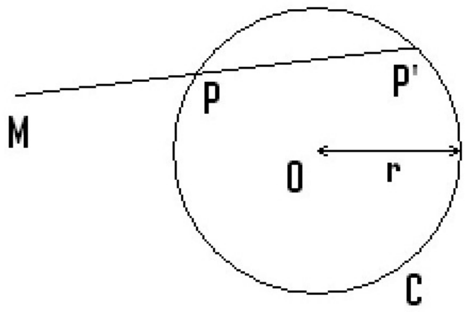
$$\begin{aligned}\varphi(ab) &= \varphi\left(\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\right)\\ &= \varphi\left(\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right)-\varphi\left(\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\right)\\ &= \left(\varphi\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)^2-\left(\varphi\left(\frac{a-b}{2}\right)\right)^2\\ &= \left(\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}\right)^2-\left(\frac{\varphi(a)-\varphi(b)}{2}\right)^2\\ &= \varphi(a)\varphi(b)\end{aligned}$$

$\varphi_{|\mathbb{C}}$ est donc un automorphisme de corps.

Puisque $\varphi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, $\varphi_{|\mathbb{R}}$ est l'identité. $\varphi(i)^2 = -1$ et $\varphi(a + ib) = a + \varphi(i)b$. Donc $\varphi(i) = \pm 1$. Donc $\varphi_{|\mathbb{C}} = Id$ ou $z \mapsto \bar{z}$. Donc $\varphi \in G$, CQFD.

REMARQUE

Dans la démonstration du cas cocyclique du lemme, il faut montrer que c', point d'intersection de la droite rouge et de $(a'b')$, est milieu de $[a'b']$. Il ne s'agit pas d'un fait trivial, et la façon la plus élégante (et élémentaire) de le démontrer consiste à introduire la notion de puissance par rapport à un cercle.



On appelle puissance de M par rapport au cercle C la quantité

$$\rho_C(M) = OM^2 - r^2$$

Il est évident que C est exactement l'ensemble des points de puissance nulle par rapport à lui-même. De plus, un petit calcul vectoriel donne aussi que

$$\rho_C(M) = \overrightarrow{MP}.\overrightarrow{MP'}$$

Enfin, on appelle axe radical des cercles C et C' la droite de points ayant même puissance par rapport à chacun des cercles.

Après avoir introduit tout ceci, ramenons-nous au cas qui nous intéresse. La droite rouge est l'axe radical des deux cercles (en effet, elle passe par leurs points d'intersections, qui appartiennent évidemment à l'axe radical). c' appartient donc à l'axe radical, et on en déduit que

$$(a' - c')(a' - c') = (b' - c')(b' - c')$$

Donc c' est bien le milieu de $[a'b']$.