Groupes d'ordre 12

24 décembre 2012

Résumé

Où l'on voit que les seuls groupes d'ordre 12 sont : $\frac{\mathbb{Z}}{12\mathbb{Z}}$, $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{6\mathbb{Z}}$, A_4, $\mathbb{D}_{12}$ ou $\mathcal{T}$

Soit G un groupe d'ordre 12. S'il est commutatif, la structure des groupes abélien de type fini et le théorème chinois indiquent qu'il est isomorphe à $\frac{\mathbb{Z}}{12\mathbb{Z}}$ ou à $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{6\mathbb{Z}}$

Supposons maintenant que G n'est pas abélien. Soit H un 3-Sylow, G agit par translation sur G/H. Si $g \in G$ est dans le noyau de l'action, g fixe notamment la classe du neutre, autrement dit H, donc le noyau est inclus dans H et peut être soit trivial, soit H. Dans le premier cas, G est isomorphe à un sous-groupe de Σ_4 (car $|G/H| = 4$) d'ordre 12. Un tel sous-groupe est distingué car d'indice 2, contient un élément d'ordre 3 c'est-à-dire un 3-cycles, et comme ceux-ci sont conjugués il les contient tous. A_4 est engendré par les 3-cycles et de cardinal 12 donc $G \simeq A_4$.

Dans le second cas $H \lhd G$ et il n'y a alors qu'un seul 3-Sylow, donc deux éléments d'ordre 3. Soit g l'un d'eux. Son orbite par conjugaison est de taille 1 ou 2, égale à l'indice de son centralisateur qui est donc de cardinal pair et contient un élément h d'ordre 2. h et g commutent donc $x := gh$ est d'ordre 6. De plus $\langle x \rangle$ est d'indice 2, il est donc distingué.

Supposons qu'il existe y un autre élément d'ordre 2 que x^3. On a $\langle x \rangle \cap \langle y \rangle = e$, $\langle x \rangle \lhd G$ et, par cardinalité, $\langle x \rangle \langle y \rangle = G$, donc $G \simeq \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \rtimes_\phi \frac{\mathbb{Z}}{6\mathbb{Z}}$. Le morphisme trivial donne le produit direct et le seul autre automorphisme de $\frac{\mathbb{Z}}{6\mathbb{Z}}$ est $1 \mapsto 5 = -1$. Le produit semi-direct obtenu est isomorphe à $\mathbb{D}_{12}$ (x est la rotation, y la réflexion)

Si un tel y n'existe pas, les éléments de $G \setminus \langle x \rangle$ sont d'ordre 4 ou 6. En fait 6 est exclus : si $o(z) = 6$ alors $z^3 = x^3$ et $o(z^2) = 3$ donc $z^2 = x^2$ ou $x^4 \Rightarrow z = x$ ou x^{-1}. Soit z d'ordre 4, $o(b^2) = 2$ donc $b^2 = x^3$ et $o(zxz^{-1}) = 6$ donc $zxz^{-1} = x$ ou x^{-1}, le premier étant exclus sinon x et z commuteraient et G serait abélien, G est isomorphe au groupe dicyclique $\mathcal{T}$:

$$\mathcal{T} = \langle x, z | x^6 = e, z^2 = x^3, zxz^{-1} = x^{-1} \rangle$$

Référence :

Delcourt, "Théorie des groupes" p.98