Sous-groupes finis de $\mathcal{SO}(3)$

PAUL LAUBIE

Théorème 1. *Les sous-groupes finis non-triviaux de $\mathcal{SO}(3)$ sont :*
— $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
— D_n
— $\mathfrak{A}_4$
— $\mathfrak{S}_4$
— $\mathfrak{A}_5$

Démonstration. Soit G un sous-groupe non-trivial de $\mathcal{SO}(3)$ d'ordre n. Pour $g \neq id$, on sait que g est une rotation, notons x_g et $-x_g$ les deux points de $\mathcal{S}_2$ qu'elle stabilise, on les nomme des pôles. On appelle $\mathcal{P}$ l'ensemble des pôles, il est fini.

Soit $E = \{(g, x) \in G \times \mathcal{P} \mid x \text{ est un pôle de } g\}$. Calculons son cardinal de deux façons :

$$|E| = 2n - 2$$

Car pour $g \neq id$, g a deux pôles.

$$|E| = \sum_{x \in \mathcal{P}} (|\text{Stab}_x| - 1)$$

En effet, $|\text{Stab}_x| - 1$ est le nombre d'élément dont x est un pôle.

$$|E| = \sum_{x \in \mathcal{P}} (\frac{n}{|\text{Orb}_x|} - 1)$$

$$|E| = \sum_{\mathcal{C} \in \mathcal{O}} |\mathcal{C}|(\frac{n}{|\mathcal{C}|} - 1)$$

En notant $\mathcal{O}$ l'ensembles des orbites, car les orbites forment une partition. Notons $n_{\mathcal{C}} = \frac{n}{|\mathcal{C}|}$. On obtient :

$$2 - \frac{2}{n} = \sum_{\mathcal{C} \in \mathcal{O}} 1 - \frac{1}{n_{\mathcal{C}}}$$

Comme $n > 1$, on a $2 - \frac{2}{n} > 1$, ainsi la somme a au moins deux termes non-nuls.
De plus $2 - \frac{2}{n} < 2$, donc la somme a au plus trois termes non-nuls.
Notons $c_i = \frac{n}{n_i} = \mathcal{C}_i$ pour i un indice. Si $c_i = 1$ alors G laisse un point fixe, donc G fixe la droite

vectoriel passant par ce point, par projection, G peut être identifié à un sous-groupe de $\mathcal{SO}(2)$ et est donc cyclique.

- **Si exactement deux termes sont non-nuls** :

  $$\frac{2}{n} = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}$$

  Ainsi :

  $$2 = c_1 + c_2$$

  Donc $c_1 = c_2 = 1$, donc G est cyclique.

- **Si exactement trois termes sont non-nuls**, supposons $2 \leq n_1 \leq n_2 \leq n_3$:

  $$1 + \frac{2}{n} = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3}$$

  Comme $1 + \frac{2}{n} > 1$, on a $n_1 = 2$, donc :

  $$1 + \frac{4}{n} = \frac{2}{n_2} + \frac{2}{n_3}$$

  - **Si** $n_2 = 2$, alors :

    $$\frac{4}{n} = \frac{2}{n_3}$$

    Donc $n_3 = \frac{n}{2}$ et $c_3 = 2$, en particulier $n \in 2\mathbb{N}$ et $n \geq 4$. Si $n = 4$ alors $G \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$. Comme $c_3 = 2$, alors $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \subseteq \mathcal{C}_3^{\perp}$. Ainsi $\mathcal{C}_1$ décrit un polygone et il y a un morphisme naturel $\varphi : G \to \mathrm{Is}(\mathcal{C}_1)$. Ce morphisme est injectif pour $n \geq 6$ car, dans $\mathcal{SO}(3)$, seule l'identité fixe trois points sur $\mathcal{S}_2$. Par cardinalité, $\mathcal{C}_1$ est un polygone régulier et $G \simeq \mathrm{D}_n$.
  - **Si** $n_2 = 3$, alors :

    $$1 + \frac{12}{n} = \frac{6}{n_3}$$

    Ainsi, $n_3 < 6$ et :

    $$n = \frac{12 n_3}{6 - n_3}$$

    - Si $n_3 = 3$, alors $n = 12$ et $c_1 = 6$, $c_2 = 4$, $c_3 = 4$.
      G agit natutellement sur $\mathcal{C}_2$ de plus l'action est fidèle car, dans $\mathcal{SO}(3)$, seule l'identité fixe trois points sur $\mathcal{S}_2$ (ici quatre sont fixés). Ainsi G est isomorphe à un sous-groupe de $\mathfrak{S}_4$ d'indice 2, donc $G \simeq \mathfrak{A}_4$.

    - Si $n_3 = 4$, alors $n = 24$ et $c_1 = 12$, $c_2 = 8$, $c_3 = 6$.
      L'antipode de $\mathcal{C}_2$ est également une orbite, donc $\mathcal{C}_2$ est stable par antipodie. Ainsi $\mathcal{C}_2$ donne une collection de quatres droites $\mathcal{D}$. G agit naturellement sur $\mathcal{D}$, de plus l'action est fidèle car, dans $\mathcal{SO}(3)$, seule l'indentité fixe trois droites. Par cardinalité, $G \simeq \mathfrak{S}_4$.

— Si $n_3 = 5$, alors $n = 60$ et $c_1 = 30$, $c_2 = 20$, $c_3 = 12$.
L'obite $\mathcal{C}_3$ forme un polyèdre, on a donc un morphisme $\varphi : G \to \text{Is}^+(\mathcal{C}_3)$, de plus ce morphisme est injectif, en effet, dans $\mathcal{SO}(3)$, seule l'identité fixe trois points sur $\mathcal{S}_2$ (ici douze sont fixés).
Montrons que $\mathcal{C}_3$ est un icosaèdre :
$\mathcal{C}_3$ est stable par antipodie, ainsi $|\text{Is}(\mathcal{C}_3)| = 2|\text{Is}^+(\mathcal{C}_3)|$.
Le polyèdre $\mathcal{C}_3$ à autant d'arrêtes parvennant à chaque sommets car par définition, pour tout couple de sommets, il existe une isométrie direct envoyant l'un sur l'autre. Notons a_s ce nombre.
De plus l'action d'un groupe d'isométrie d'un polyèdre sur l'ensemble de ses drapeaux est toujours fidèle. Notons $\mathcal{D}$ l'ensemble des drapeaux de $\mathcal{C}_3$. On a :

$$60 \leq |\text{Is}^+(\mathcal{C}_3)| \text{ et } |\text{Is}(\mathcal{C}_3)| \leq |\mathcal{D}|$$

Donc :

$$120 \leq |\mathcal{D}|$$

Le nombre de drapeau est donné par $s \times a_s \times 2$ avec s le nombre de sommets. De plus a_s est au minimum 3. Donc :

$$|\mathcal{D}| \leq 120$$

Donc $\text{Is}(\mathcal{C}_3)$ agit transitivement sur $\mathcal{D}$, donc $\mathcal{C}_3$ est régulier, il a douze sommets, c'est donc un icosaèdre et $\text{Is}^+(\mathcal{C}_3) \simeq \mathfrak{A}_5$. Par cardinalité, $G \simeq \mathfrak{A}_5$.

$\square$