Équation de Hill–Mathieu

Arnaud Girand

17 juin 2012

Référence :
- [QZ95], p. 401–403

On considère l'équation différentielle linéaire du second ordre suivante :

$$y'' + qy = 0 \text{ où } q \in \mathcal{C}^1_{\pi-\mathrm{per}}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \text{ est paire} \tag{1}$$

Notons $W \subset \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ l'ensemble des solutions complexes de (1) et considérons l'endomorphisme suivant :

$$\begin{aligned} u : \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) &\to \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \\ y &\mapsto y(. + \pi) \end{aligned}$$

Alors, si $y \in W$ on a :

$$0 = \underbrace{y(. + \pi)''}_{=y''(.+\pi)} + q(. + \pi)y(. + \pi) = y(. + \pi)'' + qy(. + \pi)$$

Donc W est un s–e.v u–stable de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Or W est un s–e.v de dimension 2 de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ dont une base est donnée par $(y_1, y_2) \in W^2 \cap \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant $y_1(0) = 1$, $y_1'(0) = 0$, $y_2(0) = 0$ et $y_2'(0) = 1$. De fait l'endomorphisme induit par u sur W peut–être identifié à sa matrice dans la base (y_1, y_2), soit $A := \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.

Or $u(y_1) = Ay_1 = ay_1 + by_2 = y_1(. + \pi)$ et donc, par évaluation en 0, $y_1(\pi) = a$. De plus, on obtient en dérivant que $y_1'(. + \pi) = ay_1' + by_2'$. Évaluée en 0 cette égalité donne $b = y_1'(\pi)$. En se livrant aux mêmes exactions sur y_2 on obtient :

$$A = \begin{pmatrix} y_1(\pi) & y_2(\pi) \\ y_1'(\pi) & y_2'(\pi) \end{pmatrix}$$

Proposition 1
On pose $T := \mathrm{Tr}(A) = y_1(\pi) + y_2'(\pi)$. Alors :
- *(i) si $|T| < 2$, toutes les solutions de (1) sont bornées ;*
- *(ii) si $|T| = 2$, (1) possède une solution non nulle bornée ;*
- *(iii) $|T| = 2 \Leftrightarrow y_1'(\pi) \times y_2(\pi) = 0$;*
- *(iv) si $|T| > 2$ alors toutes les solutions non nulles de (1) sont non bornées.*

Démonstration : Commençons par remarquer que si on note $W(y_1, y_2)$ le wronskien de (y_1, y_2) on a :

$$\begin{aligned} W(y_1, y_2)' &= (y_1y_2' - y_1'y_2)' \\ &= y_1'y_2' + (-qy_2)y_1 - (-qy_1)y_2 - y_1'y_2' \\ &= 0 \end{aligned}$$

Or $W(y_1, y_2)(0) = 1$ donc $W(y_1, y_2) = 1$ d'où $\det(A) = W(y_1, y_2)(\pi) = 1$. In fine on a :

$$\chi_A = X^2 - TX + 1 \in \mathbb{R}[X]$$

De fait, le discriminant de ce polynôme est $\Delta = T^2 - 4$.

(i) Dans ce cas on a $\Delta < 0$ et donc χ_A admet deux racines simples complexes conjuguées $\rho, \bar{\rho}$. Comme A est alors diagonalisable, il existe une base (u, v) de W formés de vecteurs propres de A, i.e $u(. + \pi) = \rho u$ et $v(. + \pi) = \bar{\rho} v$. Par relations coefficients–racines, $\rho\bar{\rho} = 1$ donc $|\rho| = |\bar{\rho}| = 1$ et donc $|u|$ et $|v|$ sont continues π–périodiques donc bornées. Par linéarité, tout élément de W est borné.

(ii) On a $T = \pm 2$, donc $\Delta = 0$ i.e χ_A admet une racine réelle double, qui est nécessairement ± 1 par relations coefficients–racines. Ceci signifie qu'il existe $u \in W \setminus \{0\}$ tel que $u(. + \pi) = \pm u$. De fait, $|u|$ est continue π–périodique donc bornée.

(iii) Commençons par remarquer que comme $\chi_A(A) = 0$ on a $A + A^{-1} = TI_2$. De plus, on peut montrer en utilisant l'unicité dans Cauchy–Lipschitz que y_1 (resp. y_2) est paire (resp. impaire) d'où, comme u^{-1} est l'endomorphisme $y \mapsto y(. - \pi)$:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} y_1(-\pi) & y_2(-\pi) \\ y_1'(-\pi) & y_2'(-\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -c \\ -b & d \end{pmatrix}$$

D'où :

$$\begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+d & 0 \\ 0 & a+d \end{pmatrix}$$

Donc $a = d$ et de fait :

$$\begin{aligned} T = \pm 2 &\Leftrightarrow a = d = \pm 1 \\ &\Leftrightarrow bc = 0 \text{ car } ad - bc = 1 \end{aligned}$$

(iv) Si $|T| > 2$ alors χ_A admet deux racines réelles r et $r' = r^{-1}$ (car $rr^{prime} = 1$), avec $|r| > 1$ (quitte à intervertir les deux racines). De fait A est diagonalisables et si on se donne (u, v) une base de W formée de vecteurs propres de A alors toute solution non nulle de (1) s'écrit sous la forme $y = \alpha u + \beta v$ avec $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$.

– Si $\alpha \neq 0$ alors si on fixe x tel que $u(x) \neq 0$ on a :

$$\begin{aligned} y(x + n\pi) &= \alpha r^n u(x) + br^{-n} v(x) \\ &\sim_{n\to\infty} \alpha r^n u(x) \\ &\xrightarrow[n\to\infty]{} \infty \end{aligned}$$

Donc y est non bornée.

– Si $\alpha = 0$ alors $\beta \neq 0$ et si on fixe x n'annulant pas v on a :

$$\begin{aligned} y(x + n\pi) &= br^{-n} v(x) \\ &\sim_{n\to-\infty} br^{-n} v(x) \\ &\xrightarrow[n\to-\infty]{} \infty \end{aligned}$$

Et donc y n'est toujours pas bornée, d'où le résultat.

Références

[QZ95] Hervé Queffélec and Claude Zuily. *Éléments d'analyse pour l'agrégation.* Masson, 1995.