Espace de Sobolev $H^1(I)$

Arnaud Girand

19 juin 2012

Référence :
- [Bre05], p. 121–123 et 129

Prérequis :
- théorème d'Ascoli.

Soit $I = (a, b)$ un intervalle ouvert borné de $\mathbb{R}$.
On considère l'espace de Sobolev $H^1(I)$ défini comme suit :

$$H^1(I) := \left\{ u \in L^2(I) \;\middle|\; \exists g \in L^2(I),\ \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I), \quad \int_I u\varphi' = -\int_I g\varphi \right\}$$

La fonction $g \in L^2(I)$ est alors unique : on la note u'. On munit $H^1(I)$ de la topologie associée au produit scalaire suivant :

$$\begin{aligned} \langle ., . \rangle : H^1(I) \times H^1(I) &\to \mathbb{R} \\ (u, v) &\mapsto \int_I uv + \int_I u'v' \end{aligned}$$

La norme induite par $\langle ., . \rangle$ est notée $\|.\|_{H^1}$ et vérifie :

$$\forall u \in H^1(I), \qquad \|u\|_{H^1}^2 = \|u\|_{L^2}^2 + \|u'\|_{L^2}^2$$

Proposition 1
On a les résultats suivants :
(i) $H^1(I)$ *est un espace de Hilbert ;*
(ii) $H^1(I)$ *s'injecte de façon compacte dans* $\mathcal{C}^0(\overline{I})$*.*
(iii) $H^1(I)$ *s'injecte de façon continue dans* $L^2(I)$ *;*

Démonstration :

(i) Il est clair que $(H^1(I), \langle ., . \rangle$ est préhilbertien. Soit $(u_n)_n$ une suite de Cauchy dans $H^1(I)$. Alors, si on fixe $\varepsilon > 0$ il existe $N \geq 0$ tel que :

$$\forall n \geq N, \forall p \geq 0, \quad \|u_{n+p} - u_n\|_{H^1}^2 \leq \varepsilon$$

I.e :

$$\forall n \geq N, \forall p \geq 0, \quad \|u_{n+p} - u_n\|_{L^2}^2 + \|u'_{n+p} - u'_n\|_{L^2}^2 \leq \varepsilon$$

En particulier, $(u_n)_n$ (resp. $(u'_n)_n$) est de Cauchy dans l'espace complet $L^2(I)$ donc y admet une limite $u \in L^2(I)$ (resp. $v \in L^2(I)$). Or :

$$\begin{aligned} \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I), \quad \left| \int_I u'_n \varphi - \int_I u'\varphi \right| &= \left| \int_I u_n \varphi' - \int_I u\varphi' \right| \\ &\leq \int_I |u_n - u||\varphi'| \\ &\leq \|u_n - u\|_{L^2} \|\varphi'\|_{L^2} \text{ par Cauchy–Schwarz} \\ &\xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \end{aligned}$$

Donc $\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I),\ \int_I u_n'\varphi \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_I u'\varphi$ (i.e $u_n' \rightharpoonup u'$ au sens des distributions). Cependant on montre de même que :

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I),\ \left|\int_I u_n'\varphi - \int_I v\varphi\right| \leq \|u_n' - v\|_{L^2}\|\varphi'\|_{L^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

De fait par unicité de la limite :

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I), \quad \int_I (u' - v)\varphi = 0$$

Ce qui implique, par théorème de représentation de Riesz, que $u' = v$ p.p donc dans L^2.
In fine :

$$\|u_n - u\|_{H^1}^2 = \|u_n - u\|_{L^2}^2 + \|u_n' - u'\|_{L^2}^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

D'où le résultat.

(ii) – Commençons par démontrer que tout $u \in H^1(I)$ admet un représentant continu. Soit $y_0 \in I$. On définit $\tilde{u} \in \mathcal{C}(\overline{I})$ comme suit :

$$\tilde{u} : x \mapsto \int_{y_0}^x u'(t)dt$$

$\tilde{u}$ est bien continue car $u' \in L^2(I) \subset L^1_{\text{loc}}(I)$ (car I est borné). De plus :

$$\begin{aligned}
\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I),\ \int_I \tilde{u}\varphi' &= \int_I \int_{y_0}^x u'(t)dt\varphi'(x)dx \\
&= \int_a^{y_0}\int_{y_0}^x u'(t)dt\varphi'(x)dx + \int_{y_0}^b\int_{y_0}^x u(t)dt\varphi'(x)dx \\
&= -\int_a^{y_0}\int_{y_0}^x u'(t)dt\varphi'(x)dx + \int_{y_0}^b\int_{y_0}^x u'(t)dt\varphi'(x)dx \\
&= -\int_a^{y_0} u'(t)dt\int_a^t \varphi'(x)dx + \int_{y_0}^b u'(t)dt\int_t^b \varphi'(x)dx \text{ par Fubini} \\
&= -\int_a^{y_0} u'(t)(\varphi(t) - 0)dt + \int_{y_0}^b u'(t)(0 - \varphi(t))dt \\
&= -\int_I u'\varphi
\end{aligned}$$

De fait $\tilde{u}' = u'$ et donc d'après le lemme 1, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $u = \tilde{u} + C$ presque partout donc dans $H^1(I)$. $\bar{u} := \tilde{u} + C$ est bien un représentant continu de u.

– Notons $\mathcal{B}$ la boule unité fermée de $H^1(I)$. Alors, pour $u \in \mathcal{B}$ on a :

$$\begin{aligned}
\forall x \neq y \in I,\ |u(x) - u(y)| = |\bar{u}(x) - \bar{u}(y)|^2 &= \left|\int_y^x u'(t)dt\right| \\
&\leq \sqrt{|x-y|}\|u'\|_{L^2} \text{ par Cauchy–Schwarz} \\
&\leq \sqrt{|x-y|}\|u'\|_{H^1} \\
&\leq \sqrt{|x-y|}
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{B}$ est équicontinue dans $\mathcal{C}^0(\overline{I})$. De plus *(variation par rapport au Brézis)* :

$$\begin{aligned}
\forall x \in I,\ |u(x)| &= \left| \frac{1}{b-a} \int_a^b u(x)dy \right| \\
&= \left| \frac{1}{b-a} \int_a^b \left(\int_y^x u'(t)dt - u(y) \right) dt \right| \\
&\leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \int_y^x |u'(t)|dtdy + \frac{1}{b-a} \int_I |u| \\
&\leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \int_a^b |u'(t)|dtdy + \frac{1}{b-a} \int_I |u| \\
&= \int_a^b |u'(t)|dt + \frac{1}{b-a} \int_I |u| \\
&\leq \sqrt{b-a} \|u'\|_{L^2} + \frac{1}{\sqrt{b-a}} \|u\|_{L^2} \text{ par Cauchy–Schwarz} \\
&\leq \left(\sqrt{b-a} + \frac{1}{\sqrt{b-a}} \right) \|u\|_{H^1}
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{B}$ est bornée pour $\|.\|_\infty$. De fait, par théorème d'Ascoli, $\mathcal{B}$ est relativement compacte dans $\mathcal{C}^0(\overline{I})$, d'où le résultat.

(iii) La topologie L^2 étant plus faible que la topologie de la convergence uniforme, *(iii)* est une conséquence immédiate de *(ii)*.

Détails supplémentaires :

- *Utilisation du théorème de représentation de Riesz.* Si $f \in L^2$ est telle que pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty$, $\int f\varphi = 0$ alors par densité la forme linéaire $\varphi \mapsto \int f\varphi$ est nulle. Le théorème de représentation de Riesz implique alors que $f = 0$ dans L^2 (donc presque partout).
- *Unicité de u'.* Si deux fonctions $g, h \in L^2$ vérifient que $\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I), \quad \int_I u\varphi' = -\int_I g\varphi = -\int_I g\varphi$ alors $\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I), \quad \int_I (g-h)\varphi = 0$ et donc $g = h$ presque partout.
- Soit $u \in L^1_{\text{loc}}(I)$. Alors pour $y_0 \in I$, $x\overline{I}$ et h tel que $x + h \in \overline{I}$ on a :

$$\left| \int_{y_0}^{x+h} u - \int_{y_0}^{x} u \right| = \left| \int_x^{x+h} u \right| \leq \int_x^{x+h} |u| \xrightarrow[h \to 0]{} 0 \text{ car } \forall \varepsilon \in [0,h],\ u \in L^1_{\text{loc}}(I)$$

  Donc $x \mapsto \int_{y_0}^x u \in \mathcal{C}^0(\overline{I})$.
- On a fait usage du lemme suivant (cf. [Bre05], p.122–123) :

  Lemme 1
  Soit $f \in L^1_{\text{loc}}(I)$.
  On suppose que :

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I), \quad \int_I f\varphi' = 0$$

  Alors il existe $C \in v\mathbb{R}$ tel que $f = C$ presque partout. En particulier deux éléments de $H^1(I)$ de même dérivée diffèrent d'une constante.
  DÉMONSTRATION : Soit $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$ d'intégrale 1 et soit $w \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$. Alors la fonction $h := w - \psi \int_I w$ est dans $\mathcal{C}_c^\infty(I)$ et $\int_I h = \int_I w - 1 \times \int_I w = 0$ donc[1] h admet une primitive $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$ et donc :

$$0 = \int_I f\varphi' = \int_I f \left(w - \psi \int_I w \right)$$

1. Il est clair que h admet une primitive dans $\mathcal{C}^\infty(I)$. La nullité de $\int_I h$ nous prouve que celle–ci est à support compact.

I.e :

$$\begin{aligned}\forall w \in \mathcal{C}_c^\infty(I),\ 0 &= \int_I f\left(w - \psi \int_I w\right) \\ &= \int_I fw - \int_I \int_I w(x)f(y)\psi(y)dydx \text{ par Fubini} \\ &= \int_I w\left(f - \int_I f\psi\right)\end{aligned}$$

Et donc, $f = C := \int_I f\psi$ presque partout.

Références

[Bre05] Haim Brezis. *Analyse fonctionelle*. Dunod, 2005.