Théorème de Hahn-Banach en dimension finie version analytique

2012-2013

Référence : François Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation (3e édition)*, Cassini, 2009, p.27.

Théorème.
Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie sur $\mathbb{R}$.
Soit V un sous-espace vectoriel de E.
Soit f une forme linéaire sur V.
Alors f admet un prolongement à E de même norme que f.

Démonstration.

– On suppose dans un premier temps que E est muni d'une norme euclidienne.
  Alors on a :
  $$E = V \oplus V^{\perp}$$
  On définit la forme linéaire $F : E \to \mathbb{R}$ par :
  $$F(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \in V \\ 0 \text{ si } x \in V^{\perp} \end{cases}$$
  Alors pour $x \in V$, on a :
  $$|f(x)| = |F(x)| \leq \|F\|.\|x\|$$
  donc
  $$\|f\| \leq \|F\|$$
  et pour $x \in V, x' \in V^{\perp}$, on a :
  $$|F(x + x')| = |f(x)| \leq \|f\|.\|x\| \leq \|f\|.\|x + x'\|$$
  car
  $$\|x + x'\|^2 = \|x\|^2 + \|x'\|^2 \geq \|x\|^2$$
  par Pythagore.
  Donc
  $$\|F\| = \|f\|$$

– Cas général :
On suppose $\|f\| = 1$ (f non nulle).
Soit $u \in E, x, y \in V$,

$$\begin{aligned}(f(x) - \|x-u\|) - (f(y) + \|y-u\|) &= f(x-y) - \|x-u\| - \|y-u\| \\ &\leq \|x-y\| - \|x-u\| - \|y-u\| \\ &\leq 0\end{aligned}$$

par inégalité triangulaire.
Donc

$$\sup_{x\in V}(f(x) - \|x-u\|) \leq \inf_{y\in V}(f(y) + \|y-u\|)$$

Donc il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x, y \in V, f(x) - \|x-u\| \leq a \leq f(y) + \|y-u\|$$

Soit $u \notin V$, on définit pour $x \in V, t \in \mathbb{R}$:

$$g(x+tu) = f(x) + ta$$

g est une forme linéaire sur $W := V \oplus \mathbb{R}u$ et g prolonge f, donc :

$$\|f\| \leq \|g\|$$

Pour $x \in V, g(x-u) = f(x) - a$, donc :

$$|g(x-u)| \leq \|x-u\|$$

En remplaçant x par $-\frac{x}{t}$, on a :

$$|g(x+tu)| \leq \|x+tu\|$$

donc $\|g\| \leq 1 = \|f\|$, donc :

$$\|g\| = \|f\|$$

Par récurrence, on prolonge f sur E par une forme de même norme.

$\square$