Théorème de Hahn-Banach Géométrique en Dimension Finie

Ivan Bannwarth

21 octobre 2011

Références :
Ramis-Warusfel, p724
Géométrie, Tauvel.

Théorème 1

$\mathcal{E}$ espace affine réel de dimension finie n. $\mathcal{A}$ ouvert convexe non vide de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{L}$ sous-espace affine de $\mathcal{E}$ tel que $\mathcal{A} \cap \mathcal{L} = \varnothing$. Alors il existe un hyperplan affine $\mathbb{H}$ de $\mathcal{E}$ qui contient $\mathcal{L}$ et ne rencontre pas $\mathcal{A}$.

Démonstration :
Supposons $\mathcal{L}'$ de dimension maximale vérifiant $\mathcal{A} \cap \mathcal{L} = \varnothing$ et $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}'$.

• Si $\dim(\mathcal{E}) = 1$ alors tout ouvert convexe de $\mathcal{E}$ est un intervalle et $\mathcal{L}' = \{x\}$ hyperplan affine (de dimension 0).

• $\dim(\mathcal{E}) \geq 2$. Supposons que $\dim(\mathcal{L}') < n-1$, et montrons d'abord que c'est absurde dans le cas $n = 2$ et ensuite absurde dans le cas $n > 2$ en se ramenant au cas $n = 2$ en projetant $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{E}/\mathcal{L}$.

1. *Cas* $n = 2$: On suppose donc $\dim \mathcal{L}' = 0$, c'est-à-dire $\mathcal{L}$ est un point. On vectorialise $\mathcal{E}$ au point de $\mathcal{L}'$. On suppose donc $\mathcal{L}' = \{0\}$. Soit $\mathcal{B} = \bigcup_{t>0} t\mathcal{A}$. C'est un ouvert comme réunion d'ouverts. Il est convexe car : $\forall x, y \in \mathcal{A}$, et $\forall \lambda \in [0,1]$,

$$\lambda x + (1-\lambda) y = \frac{1}{\lambda t_x + (1-\lambda)t_y}\left(\frac{\lambda t_x}{\lambda t_x + (1-\lambda)t_y}\frac{x}{t_x} + \frac{(1-\lambda)t_y}{\lambda t_x + (1-\lambda)t_y}\frac{y}{t_y}\right) \in \frac{1}{\lambda t_x + (1-\lambda)t_y}\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$$

   $\mathcal{B}$ ne contient pas 0 (sinon $0 \in A$). Mais $0 \in \overline{\mathcal{B}}$ de manière évidente donc dans $Fr(\mathcal{B})$ car B est ouvert.
   Si $Fr(\mathcal{B}) = \{0\}$ alors $\mathcal{E} \setminus \{0\} = \mathcal{B} \cup (\mathcal{E} \setminus \{\overline{\mathcal{B}}\})$. Comme $\mathcal{E}$ est de dimension $2 > 1$, $\mathcal{E} \setminus \{0\}$ est connexe donc comme $\{0\} \subsetneq \mathcal{B}$, $\mathcal{E} = \mathcal{B}$ absurde car $\mathcal{B}$ est convexe et $\mathcal{E} \setminus \{0\}$ ne l'est pas.
   Soit ainsi $x \in Fr(\mathcal{B}) \setminus \{0\}$. $x \notin \mathcal{B}$ (car $\mathcal{B}$ est ouvert) et aussi $-x \notin \mathcal{B}$. En effet, sinon par la convexité de $\mathcal{B}$, l'intervalle $[-x, x[\subset \mathcal{B}$ absurde car $0 \in [-x, x[$ et $0 \notin \mathcal{B}$ [Lemme].
   Enfin, $\mathbb{R}x \cap \mathcal{A} = \varnothing$ en effet, s'il existe $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tel que $\lambda x \in \mathcal{A}$ alors $x \in \frac{1}{\lambda}\mathcal{A}$ et donc soit x soit $-x$ est dans $\mathcal{B}$ (suivant si $\lambda > 0$ ou non). Donc $\mathcal{L}'$ est strictement inclus dans $\mathbb{R}x$ qui vérifie $\mathbb{R}x \cap \mathcal{A} = \varnothing$. Absurde avec l'hypothèse de la maximalité de la dimension de $\mathcal{L}'$.

   Donc lorsque $n = 2$, $\mathcal{L}'$ est de dimension $n-1$, c'est un hyperplan.

2. $\dim(\mathcal{E}) > 2$: On vectorialise en un point de $\mathcal{L}'$ (on suppose donc maintenant que $0 \in \mathcal{L}'$). Posons $\pi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}/\mathcal{L}'$ la surjection canonique de $\mathcal{E}$ sur l'espace vectoriel $\mathcal{E}/\mathcal{L}'$. Par définition de π et $\mathcal{E}/\mathcal{L}'$, π est une application linéaire ouverte. Donc comme $\mathcal{A}$ est un ouvert convexe non vide tel que $\mathcal{A} \cap \mathcal{L}' = \varnothing$, $\pi(\mathcal{A})$ est un ouvert convexe non vide ne contenant pas 0.
   Comme nous avons supposé $\dim(\mathcal{L}') < n - 1$, la dimension de $\mathcal{E}/\mathcal{L}'$ est strictement plus grande que 1, il existe donc un plan $\mathcal{P}$ tel que $\mathcal{P} \cap \pi(\mathcal{A}) \neq \varnothing$. Posons $\mathcal{B} = \mathcal{P} \cap \pi(\mathcal{A})$, c'est un ouvert convexe non vide de $\mathcal{P}$ espace vectoriel de dimension 2 donc d'après le cas $n = 2$, il existe $\mathcal{D}$ droite de $\mathcal{P}$ (ie hyperplan de $\mathcal{P}$), tel que $\mathcal{D} \cap \mathcal{B} = \varnothing$.
   Le sous espace vectoriel $\mathbb{H} = \pi^{-1}(\mathcal{D})$ contient alors strictement $\mathcal{L}'$ car $\dim(\Delta) = 1 > 0$ et $\mathbb{H}$ vérifie $\mathbb{H} \cap \mathcal{A} = \varnothing$, encore une fois contradictoire avec l'hypothèse de maximalité de la dimension de $\mathcal{L}'$ et $\dim(\mathcal{L}') < n - 1$.

   Conclusion, $\mathcal{L}$ est un hyperplan affine tel que $\mathcal{L}' \cap \mathcal{A} = \varnothing$.

Remarque : $\mathcal{A}$ ouvert est nécessaire comme le montre l'exemple suivant :
$\mathcal{E} = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{L} = \{0\}$, $\mathcal{A} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y < 0\right\} \cup \{(1,0)\}$. En effet $\mathcal{A}$ est un convexe mais il n'existe pas de droite vectorielle ne rencontrant pas $\mathcal{A}$ (faire un dessin si besoin).

Lemme 1

Soit B un ouvert convexe, alors $\forall x \in B, \forall y \in \partial B$, $[x,y[\subset B$

Démonstration : B ouvert et $x \in B$ donc il existe $r > 0$ tel que $\mathcal{B}(x,r) \subset B$.
Comme B est un convexe, $\overline{B}$ est aussi un convexe. Donc

$$A = \bigcup_{t \in]0,1]} t\mathcal{B}(x,r) + (1-t)y \subset \overline{B}$$

car $\forall z \in \mathcal{B}(x,r), tz + (1-t)y \in \overline{B}$. A est ouvert car $\mathcal{B}(x,r)$ est ouvert et A est une union d'ouvert.

Donc, $\forall z \in [x,y[, \exists t \in]0,1]$ tel que $z = tx + (1-t)y \in t\mathcal{B}(x,r) + (1-t)y$ qui est un ouvert inclus dans $\overline{B}$. Donc $z \in B$ car B ouvert donc égal à l'intérieur de $\overline{B}$.

Ce qui fini la démonstration du lemme.