Théorème de Hahn-Banach en dimension infinie

2013-2014

Référence : Haïm Brezis, *Analyse fonctionnelle*, Dunod, 1999, p.1.

Théorème (Hahn-Banach analytique)**.**
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
Soit $p : E \to \mathbb{R}$ une application vérifiant :

(i) $p(\lambda x) = \lambda p(x) \qquad \forall x \in E, \forall \lambda > 0$

(ii) $p(x+y) \leq p(x) + p(y) \qquad \forall x, y \in E.$

Soit G un sous-espace vectoriel de E, soit $g : G \to \mathbb{R}$ une forme linéaire telle que pour tout $x \in G, g(x) \leq p(x)$.
Alors il existe $f : E \to \mathbb{R}$ une forme linéaire qui prolonge g et telle que pour tout $x \in E, f(x) \leq p(x)$.

Lemme (Zorn)**.**
Tout ensemble ordonné, inductif et non vide admet un élément maximal.

Démonstration du théorème. On considère :

$$P := \{h \mid h : D(h) \subset E \to \mathbb{R} \text{ avec } D(h) \text{ sev de } E, h \text{ linéaire}, G \subset D(h), \\ h \text{ prolonge } g \text{ et } \forall x \in D(h), h(x) \leq p(x)\}$$

On munit P de la relation d'ordre :

$$h_1 \leq h_2 \iff D(h_1) \subset D(h_2) \text{ et } h_2 \text{ prolonge } h_1.$$

$P \neq \varnothing$ car $g \in P$.
P est inductif : soit $Q \subset P$ un sous-ensemble totalement ordonné, on note $Q = (h_i)_{i \in I}$, on définit $D(h) := \bigcup_{i \in I} D(h_i)$ et $h(x) := h_i(x)$ si $x \in D(h_i)$.
Alors h est un majorant de Q.
D'après le lemme de Zorn, P possède un élément maximal f.
Prouvons que $D(f) = E$:
Supposons que $D(f) \neq E$ et soit $x_0 \notin D(f)$, on pose $D(h) := D(f) + \mathbb{R}x_0$ et :

$$h(x + tx_0) = f(x) + t\alpha \qquad \forall x \in D(f), \forall t \in \mathbb{R}$$

pour un certain α, le but étant que $h \in P$.

On doit donc avoir :

$$f(x) + t\alpha \leq p(x + tx_0) \qquad \forall x \in D(f), \forall t \in \mathbb{R}.$$

i.e.

$$\begin{cases} f(x) + \alpha \leq p(x + x_0) & \forall x \in D(f) \\ f(x) - \alpha \leq p(x - x_0) \end{cases}$$

par (i).
Il suffit donc de choisir α tel que :

$$\sup_{y \in D(f)} (f(y) - p(y - x_0)) \leq \alpha \leq \inf_{x \in D(f)} (p(x + x_0) - f(x))$$

Ceci est possible car :

$$\begin{aligned} f(x) + f(y) &\leq p(x + y) \\ &\leq p(x + x_0) + p(y - x_0) \end{aligned}$$

Donc $f(y) - p(y - x_0) \leq p(x + x_0) - f(x) \qquad \forall x, y \in D(f)$.
Ainsi, $h \in P$ et $f \leq h, f \neq h$, on obtient une contradiction. □

Corollaire.
Soit E un espace vectoriel normé, G un sous-espace vectoriel de E.
Soit $g : G \to \mathbb{R}$ linéaire et continue.
Alors il existe $f \in E'$ prolongeant g et telle que $\|f\| = \|g\|$.

Démonstration. On pose $p(x) := \|g\|\|x\|$, les hypothèses du théorème sont bien vérifiées et on a $|f(x)| \leq \|g\|\|x\|$, d'où $\|f\| \leq \|g\|$, d'où $\|f\| = \|g\|$ car f prolonge g. □

Corollaire.
Pour tout $x \in E$, il existe $f_0 \in E'$ tel que $\|f_0\| = \|x_0\|$ et $\langle f_0, x_0 \rangle = \|x_0\|^2$.

Démonstration. Appliquer le corollaire avec $G := \mathbb{R}x_0$ et $g(tx_0) := t\|x_0\|^2$, de sorte que $\|g\| = \|x_0\|$. □

Corollaire.
Pour tout $x \in E$,

$$\|x\| = \sup_{\substack{f \in E' \\ \|f\| \leq 1}} |\langle f, x \rangle| = \max_{\substack{f \in E' \\ \|f\| \leq 1}} |\langle f, x \rangle|$$

Démonstration. Soit $x \neq 0$, alors :

$$\sup_{\substack{f \in E' \\ \|f\| \leq 1}} |\langle f, x \rangle| \leq \|x\|$$

et, par le corollaire précédent, il existe $f_0 \in E'$ tel que $\|f_0\| = \|x\|$ et $\langle f_0, x \rangle = \|x\|^2$.
On pose $f_1 := \frac{f_0}{\|x\|}$, on a $\|f_1\| = 1$ et $\langle f_1, x \rangle = \|x\|$. □

Théorème (Hahn-Banach géométrique, sens large)**.**
Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$.
Soit $A \subset E, B \subset E$ deux ensembles convexes, non vides et disjoints.
On suppose que A est ouvert.
Alors il existe un hyperplan affine fermé qui sépare A et B au sens large.

Lemme.
Soit $C \subset E$ un convexe ouvert avec $0 \in C$.
On pose, pour $x \in E$, $p(x) := \inf\{\alpha > 0 \mid x \in \alpha C\}$ la jauge de C.
Alors p vérifie les conditions (i) et (ii) de Hahn-Banach analytique et :

(iii) Il existe M tel que $0 \le p(x) \le M\|x\| \qquad \forall x \in E$

(iv) $C = \{x \in E \mid p(x) < 1\}$.

Démonstration.
(iii) Soit $r > 0$ tel que $B(0,r) \subset C$, alors $p(x) \le \frac{1}{r}\|x\|$, d'où (iii).
(i) Vérification immédiate.
(iv) – Supposons $x \in C$, C est ouvert donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que $(1+\varepsilon)x \in C$, donc :

$$p(x) \le \frac{1}{1+\varepsilon} < 1$$

– Si $p(x) < 1$, il existe $0 < \alpha < 1$ tel que $\frac{x}{\alpha} \in C$, donc :

$$x = \alpha\frac{x}{\alpha} + (1-\alpha) \times 0 \in C$$

(ii) Soit $x, y \in E$, soit $\varepsilon > 0$, alors d'après (i) et (iv) :

$$\frac{x}{p(x)+\varepsilon} \text{ et } \frac{y}{p(y)+\varepsilon} \in C$$

Donc :

$$\frac{tx}{p(x)+\varepsilon} + \frac{(1-t)y}{p(y)+\varepsilon} \in C \qquad \forall t \in [0,1]$$

Alors :

$$\text{pour } t = \frac{p(x)+\varepsilon}{p(x)+p(y)+2\varepsilon}, \text{ on a } \frac{x+y}{p(x)+p(y)+2\varepsilon} \in C$$

D'où $p(x+y) < p(x)+p(y)+2\varepsilon \qquad \forall \varepsilon > 0$, d'où (ii).

□

Lemme.
Soit $C \subset E$ un convexe ouvert non vide. Soit $x_0 \in E \setminus C$.
Alors il existe $f \in E'$ tel que $f(x) < f(x_0) \qquad \forall x \in C$.
En particulier, l'hyperplan affine d'équation $\{f = f(x_0)\}$ sépare $\{x_0\}$ et C au sens large.

Démonstration. Par translation, on peut toujours supposer $0 \in C$ et introduire p la jauge de C.
On considère $G := \mathbb{R}x_0$ et on pose $g : G \to \mathbb{R}$ la forme linéaire définie par $g(tx_0) = t \qquad \forall t \in \mathbb{R}$.
Alors $g(x) \leq p(x) \qquad \forall x \in G$:
– si $t > 0$, alors $\frac{x}{g(x)} = \frac{tx_0}{t} = x_0 \notin C$ donc $g(x) \leq p(x)$
– si $t \leq 0, g(x) \leq 0 \leq p(x)$.
Donc par Hahn-Banach analytique, il existe $f \in E'$ prolongeant g telle que $f(x) \leq p(x), \forall x \in E$. On a $f(x_0) = 1$ et f est continue par (iii). D'autre part, $(iv) \Rightarrow f(x) < 1, \forall x \in C$. □

Démonstration du théorème. On pose $C := A - B$. Alors C est convexe, ouvert (car $C = \bigcup_{y \in B}(A - y)$) et $0 \notin C$ car $A \cap B = \varnothing$.
D'après le dernier lemme, il existe $f \in E'$ tel que $f(z) < 0, \forall z \in C$,
i.e. $f(x) < f(y), \forall x \in A, \forall y \in B$.
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\sup_{x \in A} f(x) \leq \alpha \leq \inf_{y \in B} f(y)$. Alors l'hyperplan affine d'équation $\{f = \alpha\}$ sépare A et B au sens large. □

Théorème (Hahn-Banach géométrique, sens strict)**.**
Soit $A \subset E$ et $B \subset E$ deux ensembles convexes, non vides, disjoints. On suppose que A est fermé et que B est compact. Alors il existe un hyperplan fermé qui sépare A et B au sens strict.

Démonstration. Pour $\varepsilon > 0$, on pose $A_\varepsilon := A + B(0, \varepsilon)$ et $B_\varepsilon := B + B(0, \varepsilon)$ de sorte que A_ε et B_ε sont convexes, ouverts et non vides. De plus, pour $\varepsilon > 0$ assez petit, A_ε et B_ε sont disjoints (sinon on pourrait trouver des suites $\varepsilon_n \to 0, x_n \in A$ et $y_n \in B$ telles que $\|x_n - y_n\| < 2\varepsilon_n$ et on pourrait extraire une sous-suite $y_n \to y \in B$ par compacité de B et $y \in A$ car A fermé).
D'après le théorème de Hahn-Banach géométrique sens large, il existe un hyperplan fermé d'équation $\{f = \alpha\}$ qui sépare A_ε et B_ε au sens large. On a donc

$$f(x + \varepsilon z) \leq \alpha \leq f(y + \varepsilon z) \quad \forall x \in A, \quad \forall y \in B, \quad \forall z \in B(0, 1).$$

Il en résulte que

$$f(x) + \varepsilon\|f\| \leq \alpha \leq f(y) - \varepsilon\|f\|, \quad \forall x \in A, \quad \forall y \in B.$$

On conclut que A et B sont séparés au sens strict par l'hyperplan $\{f = \alpha\}$ puisque $\|f\| \neq 0$. □