Formes de Hankel

Akita

ENS Rennes, 2013-2014

Référence : *Histoires hédonistes de groupes et de géométries*, Caldero-Germoni.

Développement pour les leçons :
- 142. Algèbre des polynômes à plusieurs indéterminées. Applications.
- 144. Racines d'un polynôme. Fonctions symétriques élémentaires. Exemples et applications.
- 158. Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.
- 159. Formes linéaires et hyperplans en dimension finie. Exemples et applications.
- 170. Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.
- 171. Formes quadratiques réelles. Exemples et applications.

Intérêt : étant donné $P \in \mathbb{R}[X]$, le but du jeu est de construire une forme quadratique réelle de signature (a, b) telle que $a + b =$ (nb de racines distinctes de P) et $a - b =$ (nb de racines réelles distinctes de P).

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Notons n son degré, $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ ses racines (réelles et complexes) distinctes et $m_1, \dots, m_l$ leurs multiplicités respectives. Posons [1] $s_k := \sum_{i=1}^{l} m_i \alpha_i^k$ et $q(x_1, \dots, x_n) := \sum_{i,j=1}^{n} s_{i+j-2} x_i x_j$. q est une forme quadratique réelle car

$$\begin{aligned} s_k &= \sum(\text{racines réelles}) + \sum(\text{racines complexes}) \\ &= \sum(\text{racines réelles}) + \sum m_i(\alpha_i^k + \overline{\alpha_i}^k) \\ &= \sum(\text{racines réelles}) + \sum m_i 2\mathrm{Re}(\alpha_i^k) \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

1. Ce sont les sommes de Newton.

Notons (a, b) la signature de q et posons également, pour $k \in [\![1, l]\!]$, $\varphi_k(x_1, \ldots, x_n) := \sum_{i=1}^{n} \alpha_k^{i-1} x_i$. Les φ_k sont des formes linéaires de $\mathbb{C}^n$. Montrons qu'elles forment une famille libre. Si $\sum_{k=1}^{l} \lambda_k \varphi_k = 0$ alors (en notant $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$) : $\sum_{k=1}^{l} \lambda_k \varphi_k(e_i) = 0$, ie : $\sum_{k=1}^{l} \lambda_k \alpha_k^{i-1} = 0$, d'où [2] :

$$(\lambda_1, \ldots, \lambda_l) \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \ldots & \alpha_1^{l-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \alpha_l & \ldots & \alpha_l^{l-1} \end{pmatrix} = 0$$

Le déterminant de la matrice est un déterminant de Vandermonde non nul car les α_i sont distincts. Donc les λ_i sont nuls et la famille $(\varphi_k)_{k=1,\ldots,l}$ est libre. Or :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{l} m_k \varphi_k(x)^2 &= \sum_{k=1}^{l} m_k (\sum_{i=1}^{n} \alpha_k^{i-1} x_i)^2 \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k=1}^{l} m_k \alpha_k^{i+j-2} x_i x_j \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} s_{i+j-2} x_i x_j \\ &= q(x) \end{aligned}$$

Donc $l = \mathrm{rg}(q) = a + b$.

Pour le second résultat, remarquons que si α_k est une racine complexe de P alors $\varphi_k^2 + \overline{\varphi_k}^2 = 2\mathrm{Re}(\varphi_k)^2 - 2\mathrm{Im}(\varphi_k)^2$, aussi $\mathrm{sign}(\varphi_k^2 + \overline{\varphi_k}^2) = (1, 1)$.

Notons r le nombre de racines réelles distinctes de P et (quitte à réordonner les racines de P) supposons que les $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ sont les racines réelles de P. Alors, en regroupant les racines complexes et leurs conjuguées dans la deuxième somme et en remarquant qu'il y a $l - r$ racines complexes distinctes, on obtient :

$$q = \sum_{k=1}^{r} m_k \varphi_k^2 + \sum_{r+1}^{r+\frac{l-r}{2}} m_k (\varphi_k^2 + \overline{\varphi_k}^2)$$

Or la signature de la première somme est égale à $(r, 0)$ et celle de la deuxième est égale à $(\frac{l-r}{2}, \frac{l-r}{2})$ donc $a = r + \dfrac{l-r}{2} = r + b$ et alors $r = a - b$.

2. Remarquer que $l \leq n$ et donc ce qu'on fait là est légitime.

Calcul des sommes de Newton : (référence : *Algèbre*, Gourdon)

Pour un polynôme $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, les sommes de Newton vérifient les relations suivantes (et peuvent donc se calculer sans connaître les racines) :

$$s_0 = n,\ \forall k \in [\![1, n]\!] \ :\ s_k = -k a_{n-k} - \sum_{i=1}^{k-1} s_i a_{n-k+i},$$

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ s_{n+p} = -\sum_{k=0}^{n-1} s_{p+k} a_k.$$

Remarques :
- Développement un peu court donc à la fin faire la remarque sur le calcul des sommes de Newton et comment calculer une signature,
- le nom Hankel vient du fait que la matrice associée à q est appelée une matrice de Hankel,
- attention dans le Caldero-Germoni : à la question 3, si la racine est réelle alors $\overline{\varphi_k}^2$ n'apparaît pas dans la décomposition de la forme quadratique donc cas inintéressant,
- calcul d'une signature : décomposition de Gauss d'une forme quadratique, utilisation des mineurs principaux, règle de Descartes,
- pour aller plus loin : agreg-maths.univ-rennes1.fr/documentation/docs/racsign.pdf