Théorème de Helly

Arnaud Girand

17 juin 2012

Référence :
- [FGN09], p. 166

Lemme 1 ([FGN09], p. 166, 163 et 165)
Soit E un sous–ensemble dénombrable de $\mathbb{R}$.
Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de E dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in E, \forall n \geq 0, \quad |f_n(x)| \leq 1$$

Alors $(f_n)_n$ admet une sois suite convergeant simplement sur E.

Démonstration : Soit $(r_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une énumération de E. On va appliquer ici le procédé d'extraction diagonale de Cantor.

Commençons par démontrer par récurrence l'existence d'une suite $(\varphi_p)_p$ de fonctions strictement croissantes de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall 0 \leq k \leq p, \quad (f_{\varphi_0 \circ \ldots \circ \varphi_p(n)}(r_k))_n \text{ converge}$$

- $p = 0$. Par hypothèse, la suite $(f_n(r_0))$ est bornée d'où le résultat par théorème de Bolzano–Weierstrass.
- *Supposons la propriété vérifiée pour $p \geq 0$.* On extrait par théorème de Bolzano–Weierstrass une sous suite convergente $(f_{\varphi_0 \circ \ldots \circ \varphi_{p+1}(n)}(r_{p+1}))_n$ de la suite bornée $(f_{\varphi_0 \circ \ldots \circ \varphi_p(n)}(r_p))_n$. De plus, si $k \leq p$ la suite $(f_{\varphi_0 \circ \ldots \circ \varphi_{p+1}(n)}(r_k))_n$ est extraite de $(f_{\varphi_0 \circ \ldots \circ \varphi_k(n)}(r_k))_n$ car $\varphi_{k+1} \circ \ldots \circ \varphi_{p+1}$ est strictement croissante, donc converge.

Définissons l'application suivante :

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ n &\mapsto \varphi_0 \circ \ldots \circ \varphi_n(n) \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned} \forall n \geq 0, \psi(n+1) &= \varphi_0 \circ \ldots \circ \varphi_n(\varphi_{n+1}(n+1)) \\ &> \varphi_0 \circ \ldots \circ \varphi_n(\varphi_{n+1}(n)) \text{ car } \varphi_{n+1}(n+1) > \varphi_{n+1}(n) \\ &\geq \varphi_0 \circ \ldots \circ \varphi_n(n) \end{aligned}$$

La dernière inégalité provient du fait que si $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante on peut montrer par récurrence que $g \geq \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$. Ainsi $\psi(n+1) > \psi(n)$ donc ψ est strictement croissante. De plus, pour tout $p \geq 0$, $(f_{\psi(n)}(r_p))_{n\geq p}$ est extraite de la suite convergente $(f_{\varphi_0 \circ \ldots \circ \varphi_p(n)}(r_p))_{n\geq p}$ (car $n \mapsto \varphi_{p+1} \circ \ldots \circ \varphi_n(n)$ est strictement croissante [1]) donc converge. De fait $(f_{\psi(n)}(r_p))_{n\geq 0}$ converge et donc $(f_{\psi(n)})_{n\geq 0}$ converge simplement sur E.

Proposition 1 (Helly)
Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions croissantes de $\mathbb{R}$ dans $[-1, 1]$.
Alors $(f_n)_n$ admet une sois suite convergeant simplement sur $\mathbb{R}$.

Démonstration : En appliquant le lemme 1 à $E \leftarrow \mathbb{Q}$ on obtient l'existence d'une extraction ψ telle que $(f_{\psi(n)})_n$ converge simplement sur $\mathbb{Q}$ vers une fonction f, qui est alors nécessairement croissante sur $\mathbb{Q}$. Notons $D := \{x \in \mathbb{R} \,|\, f(x-) < f(x+)\}$, où $f(x+) := \lim_{h\to 0,\, h\in\mathbb{Q}_+} f(x+h)$ et $f(x-) = \lim_{h\to 0,\, h\in\mathbb{Q}_+} f(x-h)$ sont bien définis par croissance de f.

1. Même démonstration que pour ψ.

Si $x \notin D$ alors $f(x-) = f(x+) =: \ell$ (car f est croissante sur $\mathbb{Q}$ donc $f(x-) \leq f(x+)$). Si on fixe $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $t \in [x-\eta, x+\eta] \cap \mathbb{Q}$, $|f(t) - \ell| \leq \varepsilon$. Fixons $\alpha \in [x-\eta, x] \cap \mathbb{Q}$ et $\beta \in [x, x+\eta] \cap \mathbb{Q}$; alors :

$$\forall n \geq 0, \quad f_{\psi(n)}(\alpha) \leq f_{\psi(n)}(x) \leq f_{\psi(n)}(\beta)$$

Or par convergence simple de $(f_{\psi(n)})_n$ vers f sur $\mathbb{Q}$ et croissance de cette dernière, il existe $N \geq 0$ tel que :

$$\forall n \geq N, \quad f_{\psi(n)}(\beta) \leq f(\beta) + \varepsilon \text{ et } f_{\psi(n)}(\alpha) \geq f(\alpha) - \varepsilon$$

De fait :

$$\forall n \geq N, \quad \ell - 2\varepsilon \leq f(\alpha) - \varepsilon \leq f_{\psi(n)}(x) \leq f(\beta) + \varepsilon \leq \ell + 2\varepsilon$$

D'où $f_{\psi(n)}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$. En posant $f(x) := \ell$ on a donc la convergence simple de $(f_{\psi(n)})_n$ vers f sur $\mathbb{R} \to D$.

Si $x \in D$, il existe $q_x \in [f(x-), f(x+)] \cap \mathbb{Q}$. De plus si pour$(x, y) \in D^2$ $q_x = q_y$, $[f(x-), f(x+)] \cap [f(y-), f(y+)] \neq \emptyset$ alors par croissance de f $f(x-) = f(y-)$ et $f(x+) = f(y+)$ donc $y = x$, ce qui prouve que $x \mapsto q_x$ est injective, donc D est dénombrable. On obtient alors le résultat en appliquant le lemme 1 à la suite $(f_{\psi(n)})_n$ et à l'ensemble dénombrable D.

Références

[FGN09] Serge Francinou, Hervé Gianella, and Serge Nicolas. *Oraux X - ENS, Analyse 2 (2e édition).* Cassini, 2009.