Ind_γ est une fonction à valeurs entières, constante sur chaque composante connexe.

2013 – 2014

Référence : Walter Rudin, *Analyse réelle et complexe*, Dunod, 1998, p.247.

Théorème.
Soit $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ *un chemin de classe* $\mathcal{C}^1$ *par morceaux,* Ω *le complémentaire de* $\gamma([0,1])$*, et définissons*

$$Ind_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z}$$

pour $z \in \Omega$*.*
La fonction Ind_γ *est à valeurs entières sur* Ω*, constante sur chaque composante connexe de* Ω*, nulle sur la composante connexe non bornée de* Ω*.*

Démonstration. Tout d'abord, $\gamma([0,1])$ est compact donc inclus dans un disque borné D dont le complémentaire D^c est connexe. Par suite, D^c est inclus dans l'une des composantes connexes de Ω, ce qui montre que Ω a une unique composante connexe non bornée.

Soit $z \in \Omega$, alors

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_0^1 \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z} \,\mathrm{d}s. \tag{1}$$

En posant la fonction

$$\varphi(t) = \exp\left(\int_0^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z} \,\mathrm{d}s \right),$$

alors $\mathrm{Ind}_\gamma(z)$ est entier si et seulement si $\varphi(1) = 1$.

On a

$$\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z}$$

sauf sur un ensemble fini S où γ n'est pas différentiable. On en déduit que $\varphi/(\gamma - z)$ est continue sur $[0,1]$ et de dérivée nulle sur $[0,1] \setminus S$. S étant un ensemble fini, $\varphi/(\gamma - z)$ est constante sur $[0,1]$. De plus, $\varphi(0) = 1$ donc

$$\varphi(t) = \frac{\gamma(t) - z}{\gamma(0) - z}.$$

De plus, $\gamma(0) = \gamma(1)$ donc $\varphi(1) = 1$.

Puisque $\zeta - z \neq 0$ pour $z \in \Omega$ et $\zeta \in \gamma([0,1])$, Ind_γ est holomorphe sur Ω, donc continue. L'image d'un connexe par une fonction continue étant connexe, et Ind_γ étant à valeurs entières, Ind_γ est constante sur chaque composante connexe de Ω.

Finalement, (1) montre que $|\mathrm{Ind}_\gamma(z)| < 1$ pour $|z|$ suffisamment grand, d'où $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = 0$ sur la composante non bornée de Ω. $\square$