Inégalité isopérimétrique

2013 – 2014

Théorème.
Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ une courbe simple fermée de classe $\mathcal{C}^1$, de longueur L et enfermant une surface S. Alors

$$L^2 \geq 4\pi S$$

et $L^2 = 4\pi S$ si et seulement si γ définit un cercle parcouru une fois.

Démonstration. On commence par quelques simplifications.

Montrons que l'on peut se ramener au cas où $|\gamma'(t)| = L$ pour tout t. Pour $t \in [a,b]$, on définit l'abscisse curviligne de γ par

$$s(t) = \int_a^t |\gamma'(u)| \, \mathrm{d}u$$

et on pose

$$\varphi(t) := \frac{1}{L} s(t).$$

φ est continue et on peut supposer que γ' ne s'annule sur aucun intervalle, donc φ est strictement croissante, il s'agit donc d'une bijection de $[a,b]$ dans $[0,1]$ (car $s(b) = L$). On note $\tilde{\gamma} := \gamma \circ \varphi^{-1}$, alors

$$\begin{aligned}
\tilde{\gamma}'(t) &= (\varphi^{-1})'(t)\gamma'(\varphi^{-1}(t)) \\
&= \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(t))}\gamma'(\varphi^{-1}(t)) \\
&= L\frac{\gamma'(\varphi^{-1}(t))}{|\gamma'(\varphi^{-1}(t))|}.
\end{aligned}$$

On a donc $|\tilde{\gamma}'(t)| = L$ pour tout t. De plus, pour $t < u$,

$$\begin{aligned}
\tilde{\gamma}(t) = \tilde{\gamma}(u) &\iff \gamma(\varphi^{-1}(t)) = \gamma(\varphi^{-1}(u)) \\
&\iff \varphi^{-1}(t) = a \text{ et } \varphi^{-1}(u) = b \quad \text{car } \gamma \text{ est simple et fermée} \\
&\iff t = \varphi(a) = 0 \text{ et } u = \varphi(b) = 1.
\end{aligned}$$

Finalement, $\tilde{\gamma}$ est une courbe simple fermée de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, vérifiant $|\tilde{\gamma}(t)| = L$ pour tout t et de même support que γ. On peut donc supposer que γ vérifie les propriétés de $\tilde{\gamma}$.

Par ailleurs, quitte à remplacer γ par $\gamma(1-\cdot)$, on peut supposer que γ est positivement orientée.

On peut maintenant prouver le théorème. Pour calculer S, on utilise la formule de Green-Riemann qui s'écrit, si le domaine A enfermé par γ est vue dans $\mathbb{R}^2$,

$$\int\int_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_\gamma P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

En particulier, si on prend $Q : (x,y) \mapsto \frac{x}{2}$ et $P : (x,y) \mapsto -\frac{y}{2}$, on a $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$ donc

$$\int\int_A \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = S = \frac{1}{2}\int_\gamma x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 (x(t)y'(t) - y(t)x'(t))\,\mathrm{d}t,$$

où $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$. On en déduit

$$S = \frac{1}{2}\mathrm{Im}\int_0^1 \gamma'(t)\overline{\gamma(t)}\,\mathrm{d}t.$$

Donnons désormais une expression de L^2. On a

$$L^2 = \int_0^1 |\gamma'(t)|^2\,\mathrm{d}t.$$

On souhaite maintenant utiliser la formule de Parseval sur γ'. Pour cela, remarquons, puisque $\gamma(0) = \gamma(1)$, que l'on peut prolonger γ en une fonction 1-périodique continue de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, que l'on note toujours γ. En appliquant la formule de Parseval à γ' (qui est continue sur $[0,1]$ donc L^2), on obtient alors, si c_n désignent les coefficients de Fourier,

$$L^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(\gamma')|^2 = 4\pi^2 \sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2|c_n(\gamma)|^2$$

car $c_n(\gamma') = 2i\pi n c_n(\gamma)$.

Par ailleurs, la formule de Parseval donne aussi

$$\int_0^1 \gamma'(t)\overline{\gamma(t)}\,\mathrm{d}t = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(\gamma')\overline{c_n(\gamma)} = 2i\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} n|c_n(\gamma)|^2.$$

On en déduit

$$S = \frac{1}{2}\mathrm{Im}\int_a^b \gamma'(t)\overline{\gamma(t)}\,\mathrm{d}t = \pi\sum_{n\in\mathbb{Z}} n|c_n(\gamma)|^2.$$

D'où

$$L^2 - 4\pi S = 4\pi^2 \sum_{n\in\mathbb{Z}} (n^2 - n)|c_n(\gamma)|^2 \geq 0.$$

Par ailleurs, pour tout n différent de 0 et 1, $n^2 - n > 0$ donc $L^2 = 4\pi S$ si et seulement si $c_n(\gamma) = 0$ pour n différent de 0 et 1, c'est-à-dire si et seulement si

$$\forall t \in [0,1], \quad \gamma(t) = c_0(\gamma) + c_1(\gamma)e^{2i\pi t},$$

ce qui est une paramétrisation du cercle de centre $c_0(\gamma)$ et de rayon $|c_1(\gamma)|$. $\square$

Références

[1] Serge Francinou, Hervé Gianella, Serge Nicolas, *Oraux X-ENS Analyse 4*, Cassini, 2012, page 324.