Inégalités de Kolmogorov

2012-2013

Références : Xavier Gourdon, *Analyse*, Ellipses, 1994, p.81
Serge Francinou, Hervé Gianella, Serge Nicolas,
Oraux X-ENS, Analyse 1, Cassini, 2003, p.259.

Théorème.
Soit $f \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R}, \mathbb{C}), n \geq 2$.
Pour $k \in \{0, \ldots, n\}$, *on note* $M_k = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f^{(k)}(x)|$.
On suppose que M_0 *et* M_n *sont finis.*
Alors pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$ *:*

(i) M_k *est fini*

(ii) $M_1 \leq \sqrt{2M_0M_2}$

(iii) $M_k \leq 2^{\frac{k(n-k)}{2}} M_0^{1-\frac{k}{n}} M_n^{\frac{k}{n}}$.

Démonstration.

(i) Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, d'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, on a :

$$\left| f(x+i) - f(x) - if'(x) - \cdots - \frac{i^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x) \right| \leq \frac{i^n M_n}{n!}$$

D'où, par inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned}\left|if'(x)+\cdots+\frac{i^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x)\right| &\leq 2M_0+\frac{i^nM_n}{n!}\\ &\leq 2M_0+\frac{n^nM_n}{n!}\end{aligned}$$

Si on note $X(x)$ le vecteur colonne de $\mathbb{C}^{n-1}$ dont les composantes sont les $\dfrac{f^{(k)}(x)}{k!}$, $k\in\{1,\ldots,n-1\}$, on en déduit $\|AX(x)\|_\infty \leq K := 2M_0+\dfrac{n^nM_n}{n!}$ où :

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1\\ 2 & 2^2 & \cdots & 2^{n-1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ n-1 & (n-1)^2 & \cdots & (n-1)^{n-1}\end{pmatrix}$$

A est inversible car son déterminant est de Vandermonde, donc :

$$\forall x\in\mathbb{R},\qquad \|X(x)\|_\infty \leq \|A^{-1}\|K$$

Les M_k sont donc finis.

(ii) Soit $x\in\mathbb{R}$, soit $h>0$, par l'inégalité de Taylor-Lagrange on a :

$$|f(x+h)-f(x)-hf'(x)|\leq \frac{h^2M_2}{2}$$

et :

$$|f(x-h)-f(x)+hf'(x)|\leq \frac{h^2M_2}{2}$$

D'où :

$$|f(x+h)-f(x-h)-2hf'(x)|\leq h^2M_2$$

et :

$$2h|f'(x)|\leq h^2M_2+|f(x+h)-f(x-h)|\leq h^2M_2+2M_0$$

On en déduit $M_1\leq \dfrac{hM_2}{2}+\dfrac{M_0}{h}$ pour tout h.

Le membre de droite étant minimal en $h = \sqrt{\dfrac{2M_0}{M_2}}$, on obtient :

$$M_1 \leq \sqrt{2M_0M_2}$$

(iii) Montrons le résultat par récurrence sur n.

Pour $n = 2$ et $k = 1$, le résultat a été prouvé en (ii), pour $k = 0$ ou $k = n$ c'est évident.

Supposons le résultat vrai jusqu'au rang m et considérons f de classe $\mathcal{C}^{m+1}$. Soit $j \in \{1, \dots, m\}$. En appliquant le cas $n = 2, k = 1$ à $f^{(j-1)}$, on a :

$$M_j^2 \leq 2M_{j-1}M_{j+1}$$

Par hypothèse de récurrence dans le cas $n = j, k = j-1$, on a :

$$M_{j-1} \leq 2^{\frac{j-1}{2}} M_0^{\frac{1}{j}} M_j^{\frac{j-1}{j}}$$

Par ailleurs, par hypothèse de récurrence dans le cas $n = m+1-j, k = 1$ sur la fonction $f^{(j)}$, on a :

$$M_{j+1} \leq 2^{\frac{m-j}{2}} M_j^{\frac{m-j}{m+1-j}} M_{m+1}^{\frac{1}{m+1-j}}$$

On obtient alors :

$$M_j^2 \leq 2^{\frac{m+1}{2}} M_0^{\frac{1}{j}} M_j^{\frac{j-1}{j}+\frac{m-j}{m+1-j}} M_{m+1}^{\frac{1}{m+1-j}}$$

En élevant le résultat à la puissance $\frac{j(m+1-j)}{m+1}$, on obtient finalement :

$$M_j \leq 2^{\frac{j(m+1-j)}{2}} M_0^{1-\frac{j}{m+1}} M_{m+1}^{\frac{j}{m+1}}$$

ce qui conclut la récurrence.

$\square$