Résolution de systèmes linéaires par une méthode itérative

22 juin 2014

Soit $A = M - N$ une matrice hermitienne définie positive, avec M inversible et $M^* + N$ définie positive. On pose $B = M^{-1}N$ et $C = M^{-1}X$, pour $X \in \mathbb{C}^n$. On munit $\mathbb{C}^n$ de la norme définie par $\|X\| = \sqrt{(X|AX)}$.

L'idée est de construire une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $X_0 \in \mathbb{C}^n$ et :

$$X_{n+1} = BX_n + C$$

qui converge vers $A^{-1}X$.

Première étape : montrons que $|||B||| < 1$.

On a :

$$|||B|||^2 = \sup_{\|X\|=1} \|BX\|^2 = \max_{X^*AX=1} X^*B^*ABX$$

par compacité de la sphère unité. On a donc

$$\begin{aligned} |||B||| < 1 &\iff \forall X \neq 0, X^*B^*ABX < X^*AX \\ &\iff \forall X \neq 0, X^*(A - B^*AB)X > 0 \\ &\iff A - B^*AB \text{ est définie positive.} \end{aligned}$$

Nous avons $B = M^{-1}N = M^{-1}(M - A) = I_n - M^{-1}A$. On en déduit que :

$$\begin{aligned} A - B^*AB &= A - (I_n - AM^{*-1})A(I_n - M^{-1}A) \\ &= A - A + AM^{*-1}A + AM^{-1}A - AM^{*-1}AM^{-1}A \\ &= AM^{*-1}(M + M^* - A)M^{-1}A \\ &= (M^{-1}A)^*(M^* + N)(M^{-1}A). \end{aligned}$$

$M^* + N$ est définie positive donc $A - B^*AB$ aussi ($\forall X \neq 0, X^*(A - B^*AB)X = (M^{-1}AX)^*(M^* + N)(M^{-1}AX) > 0$).
Donc $|||B||| < 1$.

Seconde étape : montrons que $I_n - B$ est inversible.

Soit $Y \in \mathbb{C}^n$ tel que $(I_n - B)Y = 0$. Alors $BY = Y$ et donc $\|Y\| = \|BY\| \leq |||B||| \times \|Y\| < \|Y\|$ si $Y \neq 0$, ce qui est absurde. Donc $I_n - B$ est inversible.

Troisième étape : Construisons L limite de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Posons $L = (I_n - B)^{-1}C$ de sorte que $(I_n - B)L = C$. Cette limite potentielle est choisie comme point fixe de la fonction $Y \longmapsto BY + C$.

On a $\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} - L = BX_n + C - L = BX_n + (I_n - B)L - L = B(X_n - L)$ d'où $X_n - L = B^n(X_0 - L)$. Alors :

$$\|X_n - L\| \leq |||B|||^n \|X_0 - L\|.$$

Comme $|||B||| < 1$, X_n converge vers L (pour tout $X_0 \in \mathbb{C}^n$). Et :

$$L = (I_n - B)^{-1}C = (I_n - (I_n - M^{-1}A))^{-1}(M^{-1}X) = A^{-1}MM^{-1}X = A^{-1}X.$$

Cet algorithme est intéressant pour résoudre $AX = Y$ lorsque l'on sait calculer explicitement la valeur de M^{-1}. En prenant par exemple $M = \alpha I_n$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$, on a $M^* + N = M + N = 2M - A$, qui est hermitienne si 2α est supérieur à $\max\{|\lambda|, \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\}$.

Référence : Francinou-Gianella-Nicolas, Oraux-X-ENS algèbre 3, pages 169-170.