Théorème d'inversion locale

2012-2013

Référence : François Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation (3e édition)*, Cassini, 2009, p. 222.

Théorème.
Soit E, F deux espaces de Banach.
Soit U un voisinage ouvert d'un point $x_0 \in E$.
Soit $f : U \to F$ une application de classe $\mathcal{C}^1$.
Si $Df(x_0)$ est une bijection continue de E dans F, alors f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme d'un voisinage V de x_0 sur $f(V)$.

Démonstration. En posant $g(x) := (Df(x_0))^{-1}(f(x_0+x)-f(x_0))$, on se ramène au cas où $E = F, x_0 = f(x_0) = 0$ et $Df(0) = \mathrm{Id}$.
En effet :

$$\begin{aligned} Dg(0) &= D(Df(x_0))^{-1}(0) \circ Df(x_0) \\ &= Df(x_0)^{-1} \circ Df(x_0) \\ &= \mathrm{Id} \end{aligned}$$

On pose désormais $u(x) := f(x) - x$, u est de classe $\mathcal{C}^1$ et $Du(0) = 0$.
$z \mapsto Du(z)$ est continue (car u est $\mathcal{C}^1$) donc il existe $r > 0$ tel que :

$$\forall z \in B(0,r), \|Du(z)\| \leq \frac{1}{2}$$

On a :

$$u(y) - u(x) = \int_0^1 Du(x + t(y-x)).(y-x)\,\mathrm{dt}$$

donc $u_{|B(0,r)}$ est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne.
Pour $x, y \in B(0,r)$, on a donc :

$$|f(x) - f(y)| = |x + u(x) - y - u(y)| \geq \frac{1}{2}|x-y|$$

Donc $f_{|B(0,r)}$ est injective.

Soit $a \in B(0, \frac{r}{2}), x \in B(0,r)$, on a :

$$\begin{aligned} |a - u(x)| &\leq |a| + |u(x) - u(0)| \\ &\leq |a| + \frac{1}{2}|x| \\ &\leq r \end{aligned}$$

Donc l'application $\frac{1}{2}$-lipschitzienne $x \mapsto a - u(x)$ envoie $B(0,r)$ dans elle-même et $B(0,r)$ est complet.
En appliquant le théorème du point fixe, il existe un unique $y \in B(0,r)$ tel que $a - u(y) = y$, c'est-à-dire $a = f(y)$.
On pose $W := B(0, \frac{r}{2})$ et $V := f^{-1}(W) \cap B(0,r)$, alors $f_{|V}$ est surjective dans W qui est un voisinage de 0, donc f est bijective sur un voisinage de 0.
Pour $z \in B(0,r), \|Du(z)\| \leq \dfrac{1}{2}$, donc la série $\displaystyle\sum_{k\geq 0}(-Du(z))^k$ converge vers l'inverse de $\mathrm{Id} + Du(z) = Df(z)$, donc $Df(z)$ est inversible pour $z \in B(0,r)$.
Montrons maintenant que f^{-1} est différentiable sur W.
Soit $y, y_0 \in W, x, x_0 \in V$ tels que $f(x) = y$ et $f(x_0) = y_0$.
Alors :

$$y - y_0 = f(x) - f(x_0) = Df(x_0).(x - x_0) + o(|x - x_0|)$$

Or :

$$\begin{aligned} |x - x_0| &= |f(x) - f(x_0) - (u(x) - u(x_0))| \\ &\leq |y - y_0| + \frac{1}{2}|x - x_0| \end{aligned}$$

Donc $|x - x_0| \leq 2|y - y_0|$, donc $|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| \leq 2|y - y_0|$, donc f^{-1} est lipschitzienne (et en particulier continue).
Donc $o(|x - x_0|) = o(|y - y_0|)$, d'où :

$$\begin{aligned} Df(x_0).(x - x_0) &= y - y_0 + o(|y - y_0|) \\ x - x_0 &= Df(x_0)^{-1}.(y - y_0) + o(|y - y_0|) \end{aligned}$$

Donc f^{-1} est différentiable en y_0 de différentielle $Df(x_0)^{-1}$.
Finalement, f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur W car Df^{-1} est la composée des applications continues suivantes :

$$y \mapsto f^{-1}(y) \mapsto Df(f^{-1}(y)) \mapsto Df(f^{-1}(y))^{-1} = Df^{-1}(y)$$

□