Convergence d'une suite de polygones vers l'isobarycentre

[No Ref !]

Lemme (déterminant circulant)

Soit $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}$, soit $A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

et $P_A = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$.

Alors, $\det A = \prod_{k=0}^{n-1} P(\omega^k)$ avec $\omega = e^{2i\pi/n}$.

Proposition:

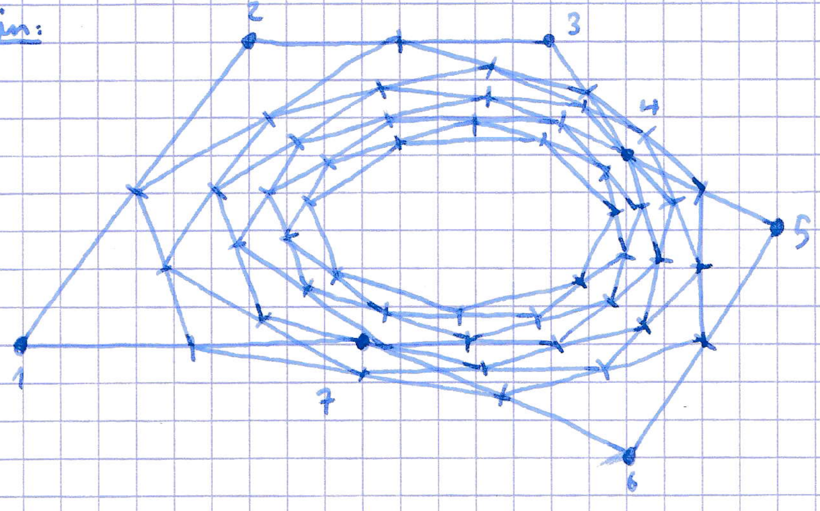
Soit $n \geqslant 3$ et $z^{(0)} = (z_1^{(0)}, \dots, z_n^{(0)}) \in \mathbb{C}^n$. On définit la suite des milieux de segments par:

$$\forall k \in \mathbb{N},\ z^{(k+1)} = \left(\frac{z_1^{(k)} + z_2^{(k)}}{2}, \dots, \frac{z_{n-1}^{(k)} + z_n^{(k)}}{2}, \frac{z_n^{(k)} + z_1^{(k)}}{2} \right)$$

Soit $g = \mathrm{Bar}\left((z_1^{(0)}, 1), (z_2^{(0)}, 1), \dots, (z_n^{(0)}, 1) \right) \in \mathbb{C}$

Alors, $z^{(k)} \xrightarrow[k \to +\infty]{} (g, \dots, g)$.

Dessin:



Preuve Lemme

On pose Ω la matrice de Vandermonde : $\Omega = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \cdots & \omega^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{2(n-1)} & \cdots & \omega^{(n-1)^2} \end{pmatrix}$

(on a mis $(\Omega)_{ij} = \omega^{ij}$) $\leftarrow$ indices $0 \leq i,j \leq n-1$

En remarquant que $(A)_{ij} = a_{j-i \pmod n}$, on a :

$$(\Omega A)_{ij} = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{ik} a_{j-k \pmod n} = \sum_{r=0}^{n-1} \omega^{(r+j)i} a_r = \omega^{ij} P_A(\omega^j)$$

$$(r = j-k \pmod n \iff k = r+j \pmod n \Rightarrow \omega^k = \omega^{r+j})$$

Autrement dit $\Omega A = \begin{pmatrix} P_A(1) & P_A(\omega) & \cdots & P_A(\omega^{n-1}) \\ \vdots & \omega P_A(\omega) & \cdots & \omega^{n-1} P_A(\omega^{n-1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_A(1) & \omega^{n-1} P_A(\omega) & \cdots & \omega^{(n-1)^2} P_A(\omega^{n-1}) \end{pmatrix}$.

Les colonnes sont chacunes factorisables par $P_A(\omega^j)$ d'où

$$\det(\Omega A) = \prod_{k=0}^{n-1} P_A(\omega^k) \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega & \cdots & \omega^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{n-1} & \cdots & \omega^{(n-1)^2} \end{vmatrix} = \prod_{k=0}^{n-1} P_A(\omega^k) (\det \Omega)$$

Donc $\det A = \dfrac{\det A\Omega}{\det \Omega} = \prod_{k=0}^{n-1} P_A(\omega^k)$. $\square$

Preuve thm

La relation de récurrence s'écrit ${}^t z^{(k+1)} = A\, {}^t z^{(k)}$

avec $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & (0) & \ddots & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & & & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. On a donc ${}^t z^{(k)} = A^k\, {}^t z^{(0)}$.

Pour calculer les puissances successives de A, on la réduit.

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X-\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & (0) & & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & & & X-\frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

Technique brutale: dev par la dernière ligne, d'où:

$$\chi_A(X) = (-1)^n\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(X-\frac{1}{2}\right)\left(X-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$= \left(X-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{2^n} \longrightarrow \text{IMPASSE!} \text{ (dur à factoriser)}$$

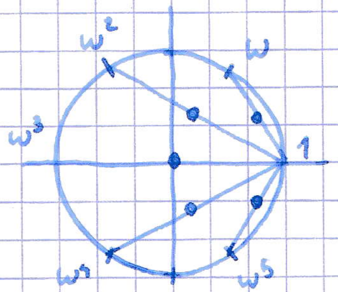
Technique qui marche: A est circulante, avec $a_0 = X-\frac{1}{2}$, $a_1 = -\frac{1}{2}$, $a_k = 0$.

Par le lemme, $\chi_A(X) = \prod_{k=0}^{n-1} P(\omega^k)$ où $P(T) = X - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}T \in \mathbb{C}[X][T]$.

donc $\chi_A(X) = \prod_{k=0}^{n-1}\left(X - \frac{1+\omega^k}{2}\right)$

χ_A est s à rs, donc A est diagonalisable, avec:

$$A = P\,\mathrm{diag}\left(\frac{1+\omega^k}{2}\right)P^{-1}$$



Observons les valeurs propres $\lambda_k := \frac{1+\omega^k}{2}$

si $k \neq 0$, $|\lambda_k| < 1$:

en effet $\lambda_k = e^{\frac{i\pi k}{n}} \cos\frac{\pi k}{n}$ par arc moitié.

Donc $D^\ell \xrightarrow[\ell\to\infty]{} \mathrm{diag}(1,0,\dots 0)$, et par continuité de la multiplication matricielle, $A^\ell \xrightarrow[\ell\to\infty]{} P\,\mathrm{diag}(1,0,\dots 0)P^{-1}$ et $z^{(\ell)}$ a une limite $z^{(\infty)}$ qui vérifie $z^{(\infty)} = Az^{(\infty)}$

$\Rightarrow z^{(\infty)}$ est $\overrightarrow{vp}$ de A de vp 1.

Notons que le sep de A de vp 1 est de dimension 1 (à voir sur χ_A).

Or, $A\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} = {}^t\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k, \dots, \sum_{k=0}^{n-1} a_k\right) = \begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$

Donc $z^{(\infty)}$ et $\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$ sont colinéaires. Autrement dit, $z^{(\infty)} = \begin{pmatrix}z\\ \vdots\\ z\end{pmatrix}$ pour $z \in \mathbb{C}$.

Il reste à montrer $z = g$.

Associativité du barycentre: Soit $g_k = \mathrm{Bar}((z_1^{(k)}, 1), \dots (z_n^{(k)}, 1))$

$$\sum_{i=1}^{n} (g_k - z_i^{(k+1)}) = \sum_{i=1}^{n}\left(g_k - \frac{z_i^{(k)} + z_{i+1}^{(k)}}{2}\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (g_k - z_j^{(k)}) = 0$$

donc $g_{k+1} = g_k$ (caractérisation du barycentre)

Continuité du barycentre: $\forall k, \sum_{i=1}^{n} (z_i^{(k)} - g) = 0$ cf préc

donc par passage à la limite, $\sum_{i=1}^{n} (z - g) = 0$ d'où $z = g$ $\square$

(!) dans le lemme, remplacer $\mathbb{C}$ par A un anneau quelconque.