# Inégalité isopérimétrique

Arnaud GIRAND

5 juillet 2012

Référence :
- [QZ95], p. 101–102 (alternativement [FGN12])

Prérequis :
- théorème de Jordan ;
- formule de Green–Riemann.

**Proposition 1 (Inégalité isopérimétrique)**
*Soient $a, b \in \mathbb{R}$*
*Soit $\Gamma$ une courbe de Jordan (i.e continue fermée simple) admettant un paramétrage $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$.*
*On note $L$ la longueur de $f$ et $S$ l'aire enfermée à l'intérieur de la courbe.*
*Alors :*

*(i)*
$$L^2 \geq 4\pi S$$

*(ii)* $L^2 = 4\pi S \Leftrightarrow f$ *définit un cercle parcouru une unique fois*

DÉMONSTRATION : D'après le théorème de Jordan, $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ possède exactement deux composantes connexes, l'une (notée $A$) bornée et l'autre non. On a alors $S = \lambda(A)$. De plus, si on pose $f = x + iy$ et si $f$ est orientée positivement [1] (i.e $\forall z \in A$, $\frac{1}{2i\pi}\int_a^b \frac{dt}{f(t) - z} = 1$) la formule de Green–Riemann s'écrit :

$$S = \frac{1}{2}\int_a^b x(t)y'(t) - y(t)x'(t)dt = \frac{1}{2}\mathrm{Im}\left(\int_a^b f'(s)\overline{f(s)}ds\right) \tag{1}$$

On peut supposer sans perdre de généralité que $L = 1$. De plus, quitte à remplacer $f$ par $f \circ s^{-1}$, avec $s$ une abscisse curviligne de la courbe, on peut supposer notre paramétrage normal, avec $a = 0$ et $b = 1$. Enfin, quitte à remplacer $f$ par $f(1 - .)$, on peut supposer la courbe orientée positivement.

Puisque $f(0) = f(1)$, on peut prolonger $f$ en une fonction 1–périodique et $\mathcal{C}^1$ par morceaux $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Alors, pour $n \in \mathbb{Z}$ on peut définir le $n$–ième coefficient de Fourier de cette application comme suit :

$$c_n(f) := \int_0^1 f(s)e^{-2i\pi ns}ds$$

En outre, comme $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$, $c_n(f') = 2i\pi nc_n(f)$. La formule de Parseval appliquée à $f'$ (qui est bien $L^2$ car continue sur un compact) donne alors :

$$L = 1 = \int_0^1 |f'(s)|ds = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f')|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 4\pi^2|c_n(f)|^2$$

Comme $f$ et $f'$ sont $L^2$ elles sont sommes (au sens $L^2$) de leurs séries de Fourier. En particulier :

$$\int_0^1 f'(s)\overline{f(s)}ds = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f')\overline{c_n(f)}$$

Ainsi, par la formule ( 1 ) :

$$S = \frac{1}{2}\mathrm{Im}\left(\int_0^1 f'(s)\overline{f(s)}ds\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \pi n|c_n(f)|^2$$

1. Le théorème de Jordan nous indique que l'indice a pour valeur $\pm 1$ à l'intérieur de la courbe.

Ainsi :

$$L - 4\pi S = 4\pi^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} (n^2 - n)|c_n(f)|^2 \geq 0$$

D'où le $(i)$. De plus, $\forall n \notin \{0,1\}$, $n^2 - n > 0$ et donc dans le cas d'égalité, $c_n(f) = 0$ sauf pour $n = 0$ ou 1. Ainsi, $L = 4\pi S^2$ si et seulement si $\forall s \in [0,1]$, $f(s) = c_0(f) + c_1(f)e^{2i\pi s}$, ce qui définit le cercle de centre $c_0(f)$ et de rayon $|c_1(f)|$.

**Détails supplémentaires :**

– La formule de Green–Riemann s'écrit, pour un ouvert $\Omega$ de $\mathbb{R}^2$ :

$$\int\int_{\Omega} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)(x,y)dxdy = \int_{\partial\Omega} (P(x,y)dx + Q(x,y))dy$$

En particulier, si on prend $Q : (x,y) \mapsto \frac{x}{2}$ et $P : (x,y) \mapsto -\dfrac{y}{2}$ et $\Omega$ l'intérieur de la courbe $\Gamma$ on a $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$ et donc :

$$S := \int\int_{\Omega} dxdy = \int_{\partial\Omega} (P(x,y)dx + Q(x,y))dy = \frac{1}{2}\int_a^b x(t)y'(t) - y(t)x'(t)dt$$

# Références


[FGN12] Serge Francinou, Hervé Gianella, and Serge Nicolas. *Oraux X - ENS, Analyse 4.* Cassini, 2012.

[QZ95] Hervé Queffélec and Claude Zuily. *Éléments d'analyse pour l'agrégation.* Masson, 1995.