Théorème de JORDAN

Florian BOUGUET

Références :
– GONNORD, TOSEL : Calcul différentiel

On aura rarement vu théorème paraissant aussi stupide et s'avérant aussi dur à démontrer que le théorème de JORDAN. Nous nous placerons ici dans le cas des courbes $\mathcal{C}^1$, et le défi est déjà de taille. En fait, il s'agit d'une preuve bien trop longue pour un développement de 15 minutes. A titre personnel, je pense que les deux premières parties de la preuve sont les plus intéressantes et tiennent environ un quart d'heure. Ceci dit, il faut s'attendre à une question du style : "comment montrez-vous la fin ?". A bon entendeur…

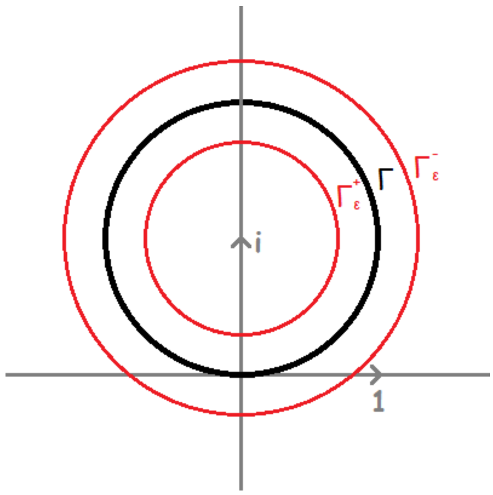
Theorème 1 (*de* JORDAN)

Soit Γ =Im(γ) avec $\gamma : \mathbb{R}/L\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ et $L > 0$.
Si γ est $\mathcal{C}^1$, injective, et si γ' ne s'annule pas
Alors $\mathbb{C}\backslash\Gamma$ possède deux composantes connexes.

Preuve :

Pour des raisons de confort, on peut supposer (quitte à modifier L, c'est à dire le "temps de parcours de γ") que $|\gamma'| = 1$, et (quitte à changer l'origine et pivoter le plan) que $\gamma(0) = 0$, $\gamma'(0) = 1$.

J'invite fortement le lecteur à se représenter et illustrer tout son développement à l'aide du cercle unité "correctement translaté et pivoté", paramétré par $\gamma(t) = i + \mathrm{e}^{i(t-\pi/2)}$ et $L = 2\pi$.



Partie 1

Dans la première partie de ce développement, introduisons, pour $\varepsilon > 0$,

$$\Gamma_\varepsilon^+ = Im(\gamma_\varepsilon^+) \qquad \text{avec } \gamma_\varepsilon^+(t) = \gamma(t) + i\varepsilon\gamma'(t)$$

$$\Gamma_\varepsilon^- = Im(\gamma_\varepsilon^-) \qquad \text{avec } \gamma_\varepsilon^-(t) = \gamma(t) - i\varepsilon\gamma'(t)$$

On va montrer que, pour ε suffisamment petit, $\Gamma \cap \Gamma_\varepsilon^+ = \emptyset$. Supposons, par l'absurde, qu'il existe $s, t \in \mathbb{R}/L\mathbb{Z}$ tels que $\gamma(t) = \gamma_\varepsilon^+(s)$. On a alors

$$\begin{aligned} |\gamma(t) - (\gamma(s) + (t-s)\gamma'(s))| &= |\gamma'(s)||i\varepsilon - (t-s)| \\ &> |t-s| \end{aligned}$$

De plus, γ' est continue et périodique donc uniformément continue (théorème de HEINE). Donc il existe $\eta > 0$ tel que

$$|t_1 - t_2| \leq \eta \Rightarrow |\gamma'(t_1) - \gamma'(t_2)| \leq 1$$

Si $|t-s| \leq \eta$ alors, en appliquant le théorème des accroissements finis à $t \mapsto \gamma(t) - (\gamma(s) + (t-s)\gamma'(s))$, on obtient

$$|\gamma(t) - (\gamma(s) + (t-s)\gamma'(s))| \leq \sup_{t_1 \in [s,t]} |\gamma'(t_1) - \gamma'(s)||(t-s)| \leq |(t-s)|$$

Ceci est impossible donc $|t-s| > \eta$. Notons alors

$$\alpha = \inf_{|t_1 - t_2| \geq \eta} |\gamma(t_1) - \gamma(t_2)|$$

$(t_1 t_2) \mapsto |\gamma(t_1) - \gamma(t_2)|$ est continue sur le compact $\{|t_1 - t_2| \geq \eta\}$ qui est un fermé de $(\mathbb{R}/L\mathbb{Z})^2$. En conséquence, α est atteint mais surtout $\alpha \neq 0$ par injectivité de γ. Considérons maintenant $\varepsilon < \alpha$.

$$\begin{aligned} \left|\gamma(t) - \gamma_\varepsilon^+(s)\right| &= |\gamma(t) - (\gamma(s) + i\varepsilon\gamma'(s))| \\ &\geq |\gamma(t) - \gamma(s)| - |i\varepsilon\gamma'(s)| \\ &\geq \alpha - \varepsilon > 0 \end{aligned}$$

Ceci étant encore impossible, il faut bien se résoudre, $\Gamma \cap \Gamma_\varepsilon^+ = \emptyset$ pourvu que $\varepsilon < \alpha$. On montre de la même façon que $\Gamma \cap \Gamma_\varepsilon^- = \emptyset$.

Partie 2

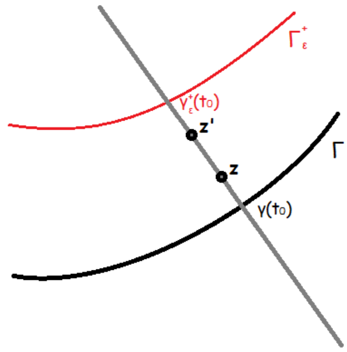
Dans la seconde partie de ce développement, fixons $\varepsilon < \alpha$. Nous allons montrer que $\mathbb{C} \backslash \Gamma$ possède au maximum deux composantes connexes en reliant tout point n'appartenant pas à Γ à Γ_ε^+ ou Γ_ε^- sans passer par Γ. Posons donc $z \in \mathbb{C} \backslash \Gamma$.

Γ est compact donc il existe (mais on n'a pas d'unicité a priori) $t_0 \in \mathbb{R}/L\mathbb{Z}$ tel que

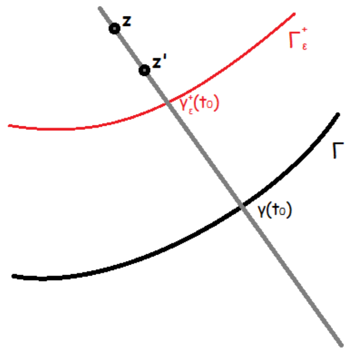
$$|z - \gamma(t_0)| = d(z, \Gamma)$$

De plus (et l'on s'en apercevra vite en dérivant $t \mapsto |z - \gamma(t_0)|^2$ et en évaluant en t_0, qui réalise le minimum de cette fonction) que $|z - \gamma(t_0)| \perp \gamma'(t_0)$. z est donc porté par $\gamma(t_0)$+Vect$(i\gamma'(t_0))$. En d'autres termes, $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $z = \gamma(t) + i\lambda\gamma'(t)$ et $\lambda \neq 0$ car $z \notin \Gamma$. Supposons $\lambda > 0$ et montrons que l'on peut relier z à Γ_ε^+ (on montre de la même façon que, si $\lambda < 0$, on peut relier z à Γ_ε^-).

Supposons, par l'absurde, qu'il existe $z' \in \Gamma$ tel que $z' \in [z, \gamma_\varepsilon^+(t_0)]$
- si $\lambda \leq \varepsilon$, les points $\gamma(t_0), z, z'$ et $\gamma_\varepsilon^+(t_0)$ sont alignés dans cet ordre. Autrement dit $z' \in \Gamma_{\lambda'}^+$ avec $\lambda' \leq \varepsilon < \alpha$, ce qui est impossible d'après la partie 1 de la démonstration.



– si $\varepsilon \leq \lambda$, les points $\gamma(t_0), \gamma_\varepsilon^+(t_0), z'$ et z sont alignés dans cet ordre. Alors, $d(z, z') < d(z\gamma(t_0)$ ce qui est impossible.



On a donc montré que que $\mathbb{C}\backslash\Gamma$ possédait aux plus deux composantes connexes.

Partie 3

Il reste donc à montrer, vous l'aurez compris, que $\mathbb{C}\backslash\Gamma$ possède au moins deux composantes connexes. On va donc montrer qu'il existe deux points de $\mathbb{C}\backslash\Gamma$ ayant un indice différent par rapport au lacet γ (attention, on parle d'indice d'un point par rapport à γ et non à Γ). Les deux points qu'on va choisir sont $i\varepsilon$ et $-i\varepsilon$ pour $\varepsilon < \alpha$ (évidemment).

$$\mathrm{Ind}_\gamma(i\varepsilon) - \mathrm{Ind}_\gamma(-i\varepsilon) = \frac{1}{2i\pi}\int_{-L/2}^{L/2}\left(\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-i\varepsilon} - \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)+i\varepsilon}\right)dt = \frac{\varepsilon}{\pi}\int_{-L/2}^{L/2}\frac{\gamma'(t)dt}{\gamma^2(t)+\varepsilon^2}$$

On remarque que le dénominateur ne peut s'annuler que si $t = 0$ et $\varepsilon = 0$, car $\pm i\varepsilon \notin \Gamma$ si $0 < \varepsilon < \alpha$. Notons

$$f(t,\varepsilon) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma^2(t)+\varepsilon^2}$$

$\frac{\gamma(t)}{t} \to \gamma'(0) = 1$ quand $t \to 0$. En conséquence, il existe $\delta > 0$ tel que, si $|t| < \delta$, $\frac{\gamma^2(t)}{t^2} > \frac{1}{2}$. On va faire le changement de variable $t \mapsto \varepsilon s$.

$$\begin{aligned}\frac{\varepsilon}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta} f(t,\varepsilon)dt &= \frac{1}{\pi}\int_{-\delta/\varepsilon}^{\delta/\varepsilon}\frac{\varepsilon^2\gamma'(\varepsilon s)ds}{\gamma^2(\varepsilon s)+\varepsilon^2} \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{\gamma'(\varepsilon s)}{1+\frac{\gamma^2(\varepsilon s)}{\varepsilon^2 s^2}s^2}\mathbb{1}_{[-\delta/\varepsilon,\delta/\varepsilon]}(s)ds\end{aligned}$$

δ a été choisi tout spécialement pour que l'intégrande soit inférieure à $1/\left(1+\frac{1}{s^2}\right)$ en minorant $\frac{\gamma^2(\varepsilon s)}{\varepsilon^2 s^2}$. De plus, on a convergence simple de l'intégrande, lorsque $\varepsilon \to 0$, vers $\frac{1}{1+s^2}$.

Donc, par convergence dominée :

$$\frac{\varepsilon}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{\gamma'(t)dt}{\gamma^2(t)+\varepsilon^2} \to \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{ds}{1+s^2}=1$$

La fin est plus facile. En effet, la fonction f est continue sur le compact $\left([-\frac{L}{2},-\delta]\cup[\delta,\frac{L}{2}]\right)\times[0,\frac{\alpha}{2}]$. Elle est donc majorée indépendamment de t et ε. Donc $\frac{1}{\pi}\int_{\delta\leq|t|\leq\frac{L}{2}}\frac{\gamma'(t)dt}{\gamma^2(t)+\varepsilon^2}$ est majorée par une constante indépendante de ε. Donc

$$\frac{\varepsilon}{\pi}\int_{\delta\leq|t|\leq\frac{L}{2}}\frac{\gamma'(t)dt}{\gamma^2(t)+\varepsilon^2}\to 0$$

En conclusion, on a donc

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\mathrm{Ind}_{\gamma}(i\varepsilon)-\mathrm{Ind}_{\gamma}(-i\varepsilon)\right)=1$$

Donc pour ε suffisamment proche de 0, les indices sont différents, ce qui achève la preuve de ce théorème.

$\square$