Leçon 241 : Suites et séries de fonctions - exemples, contre-exemples.

Mélinand Benjamin, Pierre Olivier

Dans tout ce qui suit, on considérera pour simplifier des fonctions à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Modes de convergence, propriétés

1.1 Suites de fonctions

Définition 1. Soient $f_n, f : X \to \mathbb{K}$.

On dit que la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement vers f si pour tout $x \in X$, la suite $(f_n(x))_{n\geq 0}$ converge.

La suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers f si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall x \in X, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Remarque 1. La convergence uniforme implique la convergence simple. La réciproque est fausse : considérer la suite de fonctions $f_n(x) = \frac{x}{x+n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $x \in \mathbb{R}_+$.

Proposition 1. La convergence uniforme d'une suite (f_n) est équivalente au critère de Cauchy uniforme :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall m, n \geq N, \forall x \in X, |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

1.2 Continuité, dérivabilité

Ici, X sera un espace métrique.

Théorème 1. Soit $f_n : X \to \mathbb{K}$ une suite de fonctions continues en $a \in X$, et qui converge uniformément vers f. Alors f est continue en a, et de plus :

$$\lim_{x\to a} \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to a} f_n(x).$$

Remarque 2. Il suffit que (f_n) converge uniformément au voisinage de a.

Contre-exemple : Soit $f_n(x) = x^n$ pour $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ pour tout $0 \leq x < 1$, mais $\lim_{n\to+\infty} f_n(1) = 1$. On ne peut donc avoir convergence uniforme.

Théorème 2. (Dini) Soient X un compact de $\mathbb{R}$, $(f_n$ une suite de fonctions continues convergent simplement vers f continue. On suppose en outre que pour tout n, $f_n \leq f_{n+1}$.

Alors (f_n) converge uniformément vers f sur X.

Exemple : $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^x$ sur $[0,1]$.

Théorème 3. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $f_n : I \to \mathbb{K}$. On suppose que les f_n sont dérivables sur I, avec (f'_n) convergent uniformément vers une fonction g, et qu'il existe $a \in I$ tel que $(f_n(a))$ converge.

Alors la suite (f_n) converge uniformément vers une fonction dérivable f, avec de plus $f' = g$.

Contre-exemple : $f_n(x) = \frac{\sin(n^2 x)}{n^2}$.

1.3 Séries de fonctions

Définition 2. On dit que $\sum f_n$ converge simplement vers f sur X si la suite des sommes partielles $(\sum_{0\leq k\leq n} f_k)$ converge simplement.

Définition 3. On dit que $\sum f_n$ converge uniformément vers f sur X si $\sum f_n$ converge simplement, et si la suite des restes $(\sum_{k\geq n} f_k)$ converge uniformément vers 0.

Définition 4. On dit que $\sum f_n$ converge normalement vers f sur X si la série $\sum \|f_n\|_\infty$ converge.

Remarque 3. La convergence normale implique la convergence uniforme. La réciproque est fausse : considérer $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n} x^n$ sur $[0,1]$.

Remarque 4. Il est important de noter qu'en considérant la suite des sommes partielles, on obtient les mêmes théorèmes de continuité et de dérivabilité sous la signe somme.

Contre-exemples :
- La série $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(nx)}{n}$ converge uniformément sur tout compact de $]0,2\pi[$, mais n'est pas continue en 0.
- $x \mapsto \sum_{n\geq 0} \frac{d(4^n x,\mathbb{Z})}{4^n}$ définit une fonction continue sur $\mathbb{R}$ mais nulle part dérivable.

2 Intégrabilité de suites et de séries de fonctions

Dans cette section, $(X,\mathcal{A},\mu)$ est un espace mesuré.

2.1 Convergences dans un espace mesuré

Définition 5. On dit que (f_n) converge μ-presque partout vers f sur X, s'il existe $N \subset X$ négligeable (*i.e.* inclus dans un ensemble de mesure nulle), tel que (f_n) converge simplement vers f sur $X\backslash N$.

Définition 6. On dit que (f_n) converge vers f dans $L^p(\mu)$ (où $1 \leq p \leq +\infty$), si $f, f_n \in L^p(\mu)$, et si $\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_{L^p} = 0$.

Remarque 5. La convergence L^p n'implique pas la convergence μ-presque partout. Considérer la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ définies par :

$$f_n(x) = \mathbb{1}_{[\frac{k}{2^N},\frac{k+1}{2^N}]}(x), \text{ avec } 2^N \leq n+1 < 2^{N+1}, \text{ et } k = n - 2^N + 1.$$

2.2 Théorèmes principaux

Théorème 4. (Beppo Levi)

Soit (f_n) une suite croissante de fonctions de $L^1(\mu)$, telle que $\displaystyle\sup_{n\geq 0} \int_X f_n d\mu < \infty$. Alors (f_n) converge μ-presque partout vers une fonction $f \in L^1(\mu)$, et de plus $\lim_{n\to+\infty} \|f - f_n\|_{L^1} = 0$.

Théorème 5. (Fatou)

Soit (f_n) une suite de fonctions positives de $L^1(\mu)$, telle que $\displaystyle\sup_{n\geq 0} \int_X f_n d\mu < \infty$. Alors :

$$\int_X \liminf_n f_n \leq \liminf_n \int_X f_n.$$

Contre-exemple : On peut avoir inégalité stricte : considérer $f_n = n\mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}]}$.

Remarque 6. La convergence μ-presque partout n'implique pas la convergence L^p (pour $p < \infty$).

Théorème 6. (Convergence dominée)

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $L^1(\mu)$, convergent μ-presque partout vers f. S'il existe $g \in L^1(\mu)$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leq g(x)$ pour μ-presque tout x, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \|f - f_n\|_{L^1} = 0.$$

Exemple : On peut montrer les égalités suivantes :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} \ln(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \ln(x)dx = -\gamma.$$

Bien que la convergence L^p n'implique pas la convergence μ-presque partout ($p < \infty$), on peut cependant s'y ramener, comme le montre le théorème ci-après.

Théorème 7. Soient $1 \leq p < +\infty$, et $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $L^p(\mu)$, qui converge vers f en norme L^p. Alors il existe une sous-suite $(f_{n_k})_k$ convergent μ-presque partout vers f.

De même, sous certaines hypothèses, la convergence μ-presque partout peut entraîner la convergence L^p.

Théorème 8. (Brezis-Lieb)
Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $L^p(\mu)$ (pour $1 \leq p < +\infty$) bornée dans L^p (*i.e.* $\sup_n \|f_n\|_p < +\infty$). Si $(f_n)_n$ converge μ-presque partout vers f, alors $f \in L^p(\mu)$, et on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n\|_p^p - \|f_n - f\|_p^p = \|f\|_p^p.$$

Nous en déduisons le corollaire suivant.

Corollaire 1. Soit $(f_n)_n$ une suite de $L^p(\mu)$ qui converge μ-presque partout vers f, avec $\|f_n\|_p \xrightarrow[n\to+\infty]{} \|f\|_p^p$. Alors $(f_n)_n$ converge vers f en norme L^p.

Nous disposons donc d'une condition nécessaire et suffisante pour que la convergence μ-presque partout entraîne la convergence L^p.

2.3 Interversion somme et intégrale

Théorème 9. (Fubini)
Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $L^1(\mu)$, telle que la série $\sum \|f_n\|_1$ converge. Si f désigne la somme de la série $\sum f_n$, on a alors $f \in L^1(\mu)$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \int_X f_n = \int_X \sum_{n\geq 0} f_n$.

Théorème 10. On considère ici $f_n : [a, b] \to \mathbb{K}$, continue sur $[a, b]$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$). Si $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $[a, b]$, alors :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

Contre-exemple : Ce résultat est faux si l'intervalle considéré n'est plus compact. Considérer une suite de fonctions "triangles" s'aplatissant de plus en plus sur $\mathbb{R}$ et donc l'aire est constante égale à 1 :

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{x}{n^2} + \frac{1}{n} & \text{si } x \in [-n, 0], \\ -\frac{x}{n^2} + \frac{1}{n} & \text{si } x \in [0, n], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3 Séries entières, fonctions holomorphes.

3.1 Séries entières

Dans ce paragraphe, $(a_n)_{n\geq 0}$ désignera une suite de nombres complexes, et Ω un ouvert de $\mathbb{C}$.

Théorème 11. (Lemme d'Abel)
S'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la suite $(a_n z_0^n)_n$ soit bornée, alors la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ converge normalement sur tout disque fermé $\overline{D}(0, r)$, où $0 < r < |z_0|$.

Définition 7. Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est dite développable en série entière (DSE) au voisinage V_a d'un point a de Ω s'il existe une suite de nombres complexes (a_n) telle que :

$$\forall z \in V_a, f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n (z - a)^n.$$

Exemple : $\exp(z) := \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$ définit une fonction entière sur $\mathbb{C}$.

Proposition 2. Si f est DSE en a, alors f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur V_a et $a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$.

Contre-exemple : $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x)$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ mais non DSE en 0.

Théorème 12. (Théorème taubérien de Hardy-Littlewood : premier développement)
Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels telle que $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ en $+\infty$. Si la fonction $F(x) := \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ est bien définie pour $x \in [0,1[$, et vérifie $\lim_{x\to 1_-} F(x) = s$, alors la série $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge et vaut s.

3.2 Fonctions holomorphes

Définition 8. Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est dite holomorphe si elle est $\mathbb{C}$-dérivable.

Proposition 3. (Formule de Cauchy)
Soient $a \in \Omega$, et $r > 0$ tel que $D(a,r) \subset \Omega$. Alors f holomorphe sur Ω satisfait la formule de Cauchy :

$$\forall z \in D(a,r), f(z) = \int_{\mathcal{C}(a,r)} \frac{f(\omega)}{z-\omega} d\omega.$$

Corollaire 2. Si f est holomorphe sur Ω, alors f est DSE en chacun de ses points.

Théorème 13. Soient $f_n, f : \Omega \to \mathbb{C}$, avec les f_n holomorphes sur Ω. Si $(f_n)_n$ converge uniformément sur tout compact de Ω vers f, alors f est holomorphe sur Ω, et pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite $(f_n^{(k)})_n$ converge uniformément vers $f^{(k)}$ sur tout compact.

Exemple : La fonction $\zeta(s) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n^s}$ est holomorphe sur $\{s \in \mathbb{C}, \Re(s) > 1\}$.

4 Séries de Fourier

On se placera sur le tore $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

4.1 Définitions

Définition 9. On dit que $f \in L^1(\mathbb{T})$ si $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|dt < +\infty$.

On notera $e_n : t \mapsto \mathrm{e}^{int}$ pour $n \in \mathbb{Z}$.

Les coefficients de Fourier de $f \in L^1(\mathbb{T})$ sont définis par $\hat{f}(n) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{e}^{-int}dt$.

Proposition 4. (Lemme de Riemann-Lebesgue)
Si $f \in L^1(\mathbb{T})$, alors $\lim_{n\to+\infty} \hat{f}(n) = 0$.

4.2 Théorèmes principaux

Définition 10. On définit les sommes partielles de Fourier associées à f par $S_n(f) = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k)e_k$.

Les sommes partielles de Fejér associées à f sont $\sigma_n(f) = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} S_k(f)$.

Théorème 14. (Théorème de Dirichlet)
Soit $f \in \mathcal{C}_m^1(\mathbb{T})$ (*i.e.* de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux). Alors $(S_n(f))$ converge simplement vers $\tilde{f} : t \mapsto \frac{1}{2}(f(t_+) + f(t_-))$.

Exemple : Calcul de la série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n^2}$ à l'aide de $f(t) = \frac{1-t^2}{\pi^2}$.

Théorème 15. (Fejér)
Si $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$, alors $(\sigma_n(f))_n$ converge uniformément vers f.

Corollaire 3. Les polynômes trigonométriques sont denses dans $\mathcal{C}(\mathbb{T})$.

Proposition 5. L'application $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{T}) \to \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ qui à f associe la suite de ses coefficients de Fourier $(\hat{f}(n))_n$ est injective.

Proposition 6. Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$ telle que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| < \infty$. Alors f est égale à la série de Fourier et est continue.

Application : Formule sommatoire de Poisson (deuxième développement)

Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ telle qu'il existe $M > 0$, $\alpha > 1$, de façon à ce que $|f(x)| \leq \dfrac{1}{(1+|x|)^\alpha}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Supposons que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| < \infty$, alors :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n).$$

Exemple : On définit la fonction $\theta(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-\pi n^2 t}$ pour $t > 0$.
Alors $\theta(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}\theta\left(\dfrac{1}{t}\right)$.

4.3 Théorie L^2

Théorème 16. L'espace $L^2(\mathbb{T})$ est hilbertien dont une base hilbertienne est donnée par $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

Corollaire 4. Pour tout $f \in L^2(\mathbb{T})$, on a $S_N(f) \xrightarrow[n\to+\infty]{L^2} f$.

Exemple : La fonction $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} e_n$ n'est pas dans $L^2(\mathbb{T})$ car ses coefficients de Fourier ne sont pas de carré sommables.